Achtdimensionale kompakte Translationsebenen mit großer Kollineationsgruppe

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Hermann Hähl
aus Stuttgart

1974

74 332

Achtdimensionale kompakte Translationsebenen mit großer Kollineationsgruppe

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
dem Fachbereich Mathematik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Hermann Hähl
aus Stuttgart

1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 11./19. Juni 1974

Dekan: Prof. Dr. Helmut Salzmann

1. Berichterstatter: Prof. Dr. Helmut Salzmann
2. Berichterstatter: Prof. Dr. Karl Strambach

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Ständig verwendete Bezeichnungen 8

§ 1 Lokalkompakte zusammenhängende Quasikörper

1.1 Allgemeines; die modulare Funktion 9

1.2 Automorphismen lokalkompakter zusammenhängender Quasikörper 12

1.3 Vierdimensionale reelle Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe 14

§ 2 Die Kollineationsgruppe kompakter zusammenhängender Translationsebenen

2.1 Allgemeines 23

2.2 Die Kollineationsgruppe als topologische Gruppe 25

2.3 Der Hauptsatz über die Existenz großer kompakter Kollineationsgruppen 30

§ 3 Achtdimensionale kompakte projektive Ebenen vom Lenz-Typ V

3.1 Grundsätzliches zum Lenz-Typ V 37

3.2 Zur Struktur von $SO(4)$ und ihrer universellen Überlagerung 41

3.3 $Spin(3)$ als Kollineationsgruppe achtdimensionaler Ebenen vom Lenz-Typ V 45

3.4 Achtdimensionale Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe : Übersicht 47

3.5 Achtdimensionale Ebenen vom Lenz-Typ V mit hochgradig homogener uneigentlicher Gerade 51

3.6 Achtdimensionale Ebenen vom Lenz-Typ V mit 17-dimensionaler Kollineationsgruppe und komplexem Kern 66

3.7 Der Klassifikationssatz 68

Schlußbemerkung und Ausblick 69

Literatur 71

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546514_0083

Einleitung

Ein allgemeiner Ansatz zur Analyse der von klassischen Gegenständen der Geometrie her vertrauten Verwobenheit inzidenzgeometrischer und topologischer Begriffe ist das Studium projektiver Ebenen, deren Punkt- und Geradenmenge man sich so mit einer Topologie versehen denkt, daß Verbinden und Schneiden stetige Operationen werden: sogenannter topologischer projektiver Ebenen. Eine Klassifikation solcher Ebenen kann insbesondere zeigen, was die klassischen Beispiele auszeichnet und inwieweit die dort vorgefundenen Verhältnisse typisch für das ganze Untersuchungsfeld sind. Unter diesem Blickpunkt hat sich als wichtiges Klassifikationskriterium die Homogenität der Ebene bezüglich ihrer Kollineationsgruppe erwiesen. Während man den Grad der Homogenität bei abstrakten Ebenen in der Regel durch Transitivitätsaussagen (häufig in Schließungssätzen versteckt) angibt, hat man zumindest bei zusammenhängenden topologischen Ebenen in der Dimension der (geeignet topologisierten) Kollineationsgruppe ein rein topologisches Homogenitätsmaß an der Hand; und man wird am Ende allein mit diesem Kriterium auszukommen suchen.

Für zusammenhängende kompakte topologische projektive Ebenen mit höchstens vierdimensionaler Punktmenge liegen zu dieser Fragestellung in Arbeiten von SALZMANN, BETTEN, BREITSPRECHER und STRAMBACH abgerundete Ergebnisse vor. Punkt- und Geradenraum sind stets homöomorph zur projektiven Ebene über den reellen oder komplexen Zahlen, die Geraden sind in den Punktraum als Untermannigfaltigkeiten eingebettet; die Kollineationsgruppe ist liesch. Im Fall zweidimensionaler Punktmenge sind alle Ebenen mit mindestens 3-dimensionaler Kollineationsgruppe bekannt. Unter den vierdimensionalen Ebenen besitzt nur die klassische komplexe Ebene eine Kollineationsgruppe der Dimension größer 8 (SALZMANN 1971); eine 8-dimensionale Kollineationsgruppe führt notwendig zu Translationsebenen (SALZMANN 1973), die von BETTEN vollständig klassifiziert wurden. Auch die vierdimensionalen Translationsebenen mit 7-dimensionaler Kollineationsgruppe sind durch neueste Arbeiten von BETTEN weitgehend bekannt.

Im Vergleich hierzu existieren für höherdimensionale Punktmenge unter den genannten Aspekten nur vereinzelte Ergebnisse. Außer

einigen Beispielen (PLAUMANN - STRAMBACH 1970, 1974) kennt man durch KALSCHEUER (1940) und TITS(1956) alle lokalkompakten zusammenhängenden Fastkörper; die (achtdimensionalen) Translationsebenen über den letzteren haben 17-dimensionale Kollineationsgruppe. Neuerdings hat SALZMANN (1974a,b,c) für kompakte zusammenhängende projektive Ebenen allgemein gezeigt, daß bei höchstens 16-dimensionaler Punktmenge die Punkttransitivität der Kollineationsgruppe sogar die Fahnentransitivität erzwingt und daß bei beliebiger endlicher Dimension eine fahnentransitive Kollineationsgruppe, eine Kollineationsgruppe vom Lenz-Typ III oder eine geradentransitive affine Gruppe nur den klassischen Ebenen zukommt.

Die vorliegende Arbeit versucht nun, die Übersicht im Bereich höherdimensionaler kompakter zusammenhängender Ebenen systematisch zu erweitern; dazu wird die bei vierdimensionalen Ebenen so erfolgreiche Leitidee einer Klassifikation nach der Dimension der Kollineationsgruppe wieder aufgegriffen. Dem allgemeinen Ansatz stellen sich hier jedoch eine Reihe ungelöster topologischer Fragen in den Weg, zu denen noch kein Zugang bekannt ist; etwa:

- Läßt sich auch für höhere Dimensionen allein unter wenigen milden topologischen Voraussetzungen (etwa Kompaktheit) aus der Geometrie folgern, daß die Punktmenge eine Mannigfaltigkeit ist ? Für die niederen Dimensionen stand hierfür eine Kennzeichnung von 2-Mannigfaltigkeiten anhand lokaler Homogenitätseigenschaften zur Verfügung, zu der kein höherdimensionales Analogon existiert.
- Folgt aus dem Mannigfaltigkeitencharakter der Punktmenge, daß auch die Geraden (aufgefaßt als Punktreihen) Mannigfaltigkeiten sind ? (Dies würde dann nach BREITSPRECHER (1971) die noch möglichen Dimensionen der Punktmenge auf 8 oder 16 reduzieren.) Immerhin kennt man Darstellungen von $\mathbb{R}^n$ $(n > 4)$ als Produkt zweier Nichtmannigfaltigkeiten.
- Ist wenigstens im Mannigfaltigkeitenfall die Kollineationsgruppe immer liesch ? Das würde dann den Bereich der möglichen Gruppen einem Klassifikationsansatz erschließen. Damit im Zusammenhang steht die Frage, ob abgeschlossene 0-dimensionale Unterebenen existieren können : in den niederen Dimensionen konnte das durch den Brouwerschen Translationssatz ausgeschlossen werden, für den in höheren Dimensionen kein Ersatz bekannt ist.

Bei dem gesetzten Ziel (Verbreiterung der Übersicht über mögliche Geometrien) schien es angesichts dieser offenen Probleme angezeigt,

einen konkreten Einstieg durch geometrische Zusatzvoraussetzungen zu gewährleisten, die jedoch auch allgemeinere als die bisher untersuchten Fälle erfassen sollten. Nach den Erfahrungen bei vierdimensionalen Ebenen bot sich hierfür die Beschränkung auf Translationsebenen an, was topologisch den Mannigfaltigkeitencharakter sichert und die Kollineationsgruppe als reelle lineare Gruppe aufzufassen gestattet.

Neben den bereits erwähnten Ebenen über Fastkörpern stehen als besondere Klasse kompakter zusammenhängender Translationsebenen solche, deren duale Ebenen ebenfalls Translationsebenen sind (sogenannte Ebenen vom Lenz-Typ V, koordinatisierbar über reellen nicht notwendig assoziativen Divisionsalgebren). Diese Klasse bietet erstmals bei achtdimensionaler Punktmenge einen großen Reichtum an Modellen (bei höchstens vierdimensionalen Ebenen fällt nur jeweils die klassische Ebene unter diesen Typ). Divisionsalgebren sind ein klassischer Forschungsgegenstand; offenbar wurden jedoch Ebenen über reellen Divisionsalgebren unter dem hier leitenden topologisch-geometrischen Blickwinkel noch nicht systematisch untersucht. Die Ansätze der vorliegenden Arbeit erlauben nun eine Klassifikation aller achtdimensionalen Ebenen dieses Typs mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe.

Wiewohl das einzige abgeschlossene Klassifikationsergebnis, ist dieses Resultat jedoch nicht als das Hauptergebnis der Arbeit zu verstehen, sondern eher als Anwendungsbeispiel zum Ausweis der Tragfähigkeit der zum Studium der Kollineationsgruppe kompakter zusammenhängender Translationsebenen allgemein entwickelten Methoden. Eine Schlußbemerkung am Ende der Arbeit geht skizzenhaft auf Möglichkeiten und technische Probleme weiterführender Anwendungen ein.

Ein erster Zugang zur Kollineationsgruppe ist die Untersuchung der Standgruppe eines Punktquadrupels in allgemeiner Lage, die sich als Automorphismengruppe eines die Translationsebene koordinatisierenden Quasikörpers deuten läßt. Mit ihr befaßt sich § 1 ; es ergibt sich der

Satz (1.2.2): Die Gruppe der stetigen Automorphismen eines zusammenhängenden lokalkompakten Quasikörpers ist kompakt.-

Spezialisierung auf den in den Anwendungen hauptsächlich diskutierten Fall liefert

Korollar (1.2.3): Die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe eines vierdimensionalen lokalkompakten Quasikörpers ist eine abgeschlossene Untergruppe von $SO(3)$.-

Das wichtigste Instrument zur Herleitung ist die modulare Funktion eines Quasikörpers, die ähnlich wie bei lokalkompakten Körpern eingeführt und benutzt wird. Sie liefert unter der Automorphismengruppe invariante kompakte Nullumgebungen, die in eine Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli eingehen. Für Divisionsalgebren drückt sich die modulare Funktion häufig durch quadratische Formen aus; dies scheint in der Theorie auch der reellen Divisionsalgebren die bevorzugte Betrachtungsweise zu sein, die aber von Fall zu Fall spezielle Argumente verlangt. Daß die additive Loop der betrachteten Quasikörper eine Vektorgruppe ist, ist entscheidend für die Argumentation; für allgemeinere Ternärkörper ist die analoge Fragestellung hinsichtlich Ergebnis wie Untersuchungsmethode völlig offen.

Ausgehend vom Korollar kann man schließlich unter Verwendung einfacher Tatsachen über quadratische Divisionsalgebren alle vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit größtmöglicher Automorphismengruppe klassifizieren:

Satz (1.3.5): Die vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit Einselement 1 , die eine dreidimensionale Automorphismengruppe besitzen, sind genau die Algebren D_τ mit Basis $\{1,i,j,k\}$ und Multiplikationstabelle $i^2 = j^2 = k^2 = -\tau$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; $ki = -ik = j$, wobei $\tau > 0$. Die Automorphismengruppe von D_τ besteht gerade aus allen eigentlichen Rotationen, die 1 festlassen. Für verschiedene τ sind die zugehörigen Algebren paarweise nichtisotop.-

§ 2 untersucht die Kollineationsgruppe kompakter zusammenhängender Translationsebenen als topologische Gruppe (mit der kompakt-offenen Topologie); als Hauptergebnis der Arbeit wird gezeigt, daß ein erheblicher Teil der Kollineationsgruppe kompakt ist:

Hauptsatz über die Existenz großer kompakter Kollineationsgruppen (...5.2): Die Standgruppe Δ zweier eigentlicher nichtparalleler Geraden unter der Zusammenhangskomponente der Kollineationsgruppe einer kompakten zusammenhängenden Translationsebene besitzt eine größte kompakte Untergruppe M; und es ist

$$\Delta = M \cdot R \cdot Y \quad \text{oder} \quad \Delta^1 \leq M \cdot R \ ,$$

wo R die Einparametergruppe der Streckungen mit positivem reellem Faktor und Y eine eventuell hinzutretende weitere Einparameteruntergruppe von Δ ist

(dabei bezeichnet Δ^1 die Zusammenhangskomponente von Δ). Von zugehörigen Verfeinerungen für spezielle Situationen sei hier zunächst abgesehen.

Bei der Herleitung dieses Resultats erweist sich, auf dem Weg der Beschreibung von Δ als Autotopismengruppe eines koordinatisierenden Quasikörpers, wiederum das Konzept der modularen Funktion als nützlich. Seine Anwendung ist weniger direkt als in §1 : möglicherweise nichtlineare Wirkungen auf der uneigentlichen Geraden machen umfangreichere Vorbereitungen notwendig. Deshalb wurde auch darauf verzichtet, die auf direktem Weg verhältnismäßig bequem zu gewinnenden Sätze von §1 hier als Spezialfall einzuordnen, was prinzipiell möglich wäre.

Das Ergenis ist nützlich deshalb, weil über nichttransitive Wirkungen auch von Lie-Gruppen in höheren Dimensionen häufig nur für den kompakten Fall Konkretes bekannt ist. Zum Beispiel kann man daran denken, im Fall achtdimensionaler Translationsebenen die Sätze von RICHARDSON über die Wirkung kompakter Lie-Gruppen auf der 4-Sphäre anzuwenden, um rückwirkend zu zeigen, daß die so gewonnene große kompakte Kollineationsgruppe auf der uneigentlichen Geraden eben doch topologisch äquivalent zu einer linearen Wirkung operiert und um die möglichen Wirkungen einzugrenzen und zu beschreiben.

Bei der Anwendung auf Ebenen über vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren (Ebenen vom Lenz-Typ V, §3) ist es nicht erforderlich, solche Hilfsmittel beizuziehen, da hier die Linearität der betrachteten Wirkungen augenfällig ist. Der Hauptsatz über große kompakte Kollineationsgruppen reduziert das Klassifikationsproblem auf die Kernfrage, wie Untergruppen von $SO(4)$ als

Kollineationsgruppen solcher Ebenen wirken können. Diese Frage wird in den Abschnitten 3.3 und 3.4 übersichtsweise behandelt; in den folgenden Abschnitten (3.5 und 3.6) werden dann aus den ermittelten Wirkungen die zugehörigen Ebenen konstruiert. Das Ergebnis sei hier nur als Übersicht formuliert; die detaillierte Beschreibung der sich ergebenden Ebenen samt Kollineationsgruppen entnehme man den angegebenen Textstellen:

Klassifikationssatz (Übersicht)

Die achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe lassen sich explizit beschreiben.

a) Unter diesen hat nur die klassische Ebene über den Quaternionen eine mehr als 18-dimensionale Kollineationsgruppe (ihre volle Kollineationsgruppe hat Dimension 35)

b) Es gibt drei Einparameterfamilien solcher Ebenen mit genau 18-dimensionaler Kollineationsgruppe (die Ebenen $\mathcal{T}_\alpha^S$ und $\mathcal{T}_\alpha^W$ aus 3.5.3 und die dualen Ebenen der ersteren). Sie stammen (ggf. durch Dualisieren) von Ebenen, deren Kollineationsgruppe auf der uneigentlichen Geraden zweifach transitiv ist (wenn man vom ausgezeichneten uneigentlichen Punkt absieht). Die koordinatisierenden Divisionsalgebren haben eindimensionale Automorphismengruppe.

c) Bei 17-dimensionaler Kollineationsgruppe findet man

c1) drei Familien von Ebenen mit ebenfalls (bis auf Dualisierung) zweifach homogener uneigentlicher Geraden, aber 0-dimensionaler Automorphismengruppe koordinatisierender Divisionsalgebren (die Ebenen $\mathcal{T}_A^S$ und $\mathcal{T}_A^W$ aus 3.5.1c und die dualen Ebenen der ersteren)

c2) die einparametrige Familie von Ebenen $\mathfrak{D}_\tau$ über den in 1.3.5 klassifizierten vierdimensionalen Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe

c3) die einparametrige Schar von Ebenen $\mathfrak{R}_\vartheta$ über den Algebren von REES (3.6.1) .-

Die Ebenen aus b) ordnen sich dabei als Grenzfälle in die Ebenenfamilien aus c1) ein. Die die Ebenen aus c3) koordinatisierenden Algebren sind aufgrund kennzeichnender algebraischer Eigenschaften (nämlich großer Nuklei) von REES (1950) schon klassifiziert worden.

Bei der Behandlung der zugrundeliegenden Divisionsalgebren wird verschiedentlich deutlich, wie die Anwendung geometrischer Argumente die Lösung algebraischer Fragen (z.B. des Isotopieproblems) erleichtert. Besonders augenfällig wird das bei den Algebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe oder den Algebren von REES, wo sich die Autotopismengruppe einfach durch Einordnung in das allgemein entwickelte Schema möglicher Wirkungen von Kollineationsgruppen ablesen läßt.

An den gewonnenen Divisionsalgebren fällt auf, daß ihre Multiplikation durch Deformation der Quaternionenmultiplikation entsteht - eine Beobachtung, die einem allgemein zu vermutenden Prinzip entspricht (vgl. BREITSPRECHER (1972)). Insbesondere ist ihre Multiplikation homotop zur Quaternionenmultiplikation; etwa durch Darstellung des Punktraums der zugehörigen projektiven Ebene als Thom-Komplex eines Hopf-Bündels über der uneigentlichen Geraden mit durch die Multiplikation beschriebener charakteristischer Abbildung läßt sich damit zeigen, daß der Punktraum der hier beschriebenen Ebenen stets homöomorph zum Punktraum $\mathbb{P}_2(\mathbb{H})$ der Quaternionenebene ist. (Die Vermutung, daß entsprechendes zumindest für Translationsebenen immer gilt, hat sich bisher allen Beweisversuchen entzogen)*. Damit sind durch die Kollineationsgruppen der vorgestellten Ebenen Beispiele von Transformationsgruppen auf $\mathbb{P}_2(\mathbb{H})$ gewonnen.

Herrn Prof. Salzmann, der diese Arbeit angeregt hat, danke ich herzlich für seine fördernden Fragen und Ratschläge sowie seine ständige Bereitschaft zu Diskussion und Ermutigung bei Schwierigkeiten.

---

* (Anmerkung bei der Drucklegung:) Inzwischen wurde diese Vermutung jedenfalls für Ebenen über beliebigen Divisionsalgebren und allgemeiner über differenzierbaren Quasikörpern von Th. BUCHANAN bewiesen .

Ständig verwendete Bezeichnungen

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$	Die Körper der rationalen, reellen, komplexen Zahlen und der Quaternionen
$\mathbb{O}$	Der Alternativkörper der Oktaven
$\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{H}^\times$	Multiplikative Gruppen $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathbb{H}\setminus\{0\}$ von $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$
$\mathbb{R}^0$	Multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen
$\langle a_1,\cdots,a_n\rangle$	Der von den Elementen $a_1,\cdots,a_n$ eines Vektorraums aufgespannte lineare Teilraum.
L_∞	Die Translationsachse von Translationsebenen
W,S	Affine (von L_∞ verschiedene) Geraden einer Translationsebene; häufig erste und zweite Koordinatenachse einer Koordinatisierung der Translationsebene durch einen Quasikörper
$0 = W \wedge S$	Koordinatenursprung einer solchen Koordinatisierung
$s = S \wedge L_\infty$ $w = W \wedge L_\infty$	Die durch S und W bestimmten uneigentlichen Punkte (dabei wird in Ebenen vom Lenz-Typ V s stets als Translationszentrum gewählt - vgl. 3.1.1)
G	Gruppe der affinen (d.h. L_∞ festlassenden) Kollineationen einer Translationsebene (mit der kompakt-offenen Topologie, vgl. 2.2.2 - 2.2.3)
Σ	Gruppe der stetigen affinen Kollineationen
Γ	Zusammenhangskomponente von G

Für eine Untergruppe Δ von G :

Δ^1	Zusammenhangskomponente von Δ .
$\Delta_{L_1,\cdots,L_n;p_1,\cdots,p_m}$	Gruppe der Elemente von Δ , die die Geraden $L_1,\cdots,L_n$ und die Punkte $p_1,\cdots,p_m$ festhalten (Standgruppe von Δ auf $L_1,\cdots,L_n$; $p_1,\cdots,p_m$)
$\Delta_{[p,L]}$	Gruppe der axialen Kollineationen in Δ mit Zentrum p und Achse L .

Falls Δ eine Gerade L festhält:

$\Delta\|L$	Gruppe der von Δ induzierten Bijektionen von L in sich (mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich L).

§1 Lokalkompakte zusammenhängende Quasikörper

1.1 Allgemeines; die modulare Funktion.

Zunächst sei erinnert an die folgende

1.1.1 Definition.
Ein topologischer Quasikörper ist ein topologischer Raum Q mit zwei in beiden Variabeln stetigen Verknüpfungen + und ·, die folgenden Bedingungen genügen:

(i) (Q,+) ist eine kommutative topologische Gruppe (mit Neutralelement 0)

(ii) Die Multiplikation · besitzt ein Neutralelement 1 und für alle m,x,y ∈ Q gilt

$$m(x + y) = mx + my \qquad \text{(Linksdistributivität)}$$

und $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$

(iii) Für alle a,b,c ∈ Q mit $a \neq b$ existiert genau ein $x \in Q$ mit

$$ax - bx = c$$

und genau ein $y \in Q$ mit

$$ya = c \quad ;$$

und x bzw. y hängen stetig von a,b,c bzw. a,c ab.

Ein Quasikörper heiße echt, wenn er kein Körper ist.-
Es sei angemerkt, daß die Kommutativität der Addition + bereits aus den übrigen Axiomen folgt (vgl. PICKERT 3.4).

1.1.2
Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten topologischen Quasikörper Q sind stets lokalkompakt und von positiver Dimension.
Nach SALZMANN (1967) 7.23 und 7.24 ist dann die additive Gruppe von Q als topologische Gruppe isomorph zu $\mathbb{R}^m$ mit $m = 1,2,4,8$ und im Fall $m = 1$ ist Q isomorph zum topologischen Körper der reellen Zahlen. Wir betrachten daher im weiteren nur die Fälle höherer Dimension und identifizieren (Q,+) stets mit $\mathbb{R}^{2n}$, $n = 1,2,4$.
Wegen der Linksdistributivität und Stetigkeit der Multiplikation ist dann für alle $m \in Q$ die Abbildung

$$\lambda_m : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} : x \longmapsto mx$$

linear; und für $m \neq 0$ ist, als Folge von 1.1.1 (iii), $\lambda_m \in GL(2n,\mathbb{R})$.
Die Abbildung

$$Q \longrightarrow GL(2n,\mathbb{R}) \cup \{0\}: \; m \longmapsto \lambda_m$$

ist eine Einbettung (bezüglich der kompakt-offenen Topologie), da mit der Stetigkeit der Multiplikation aus $m_\nu \longmapsto m$ und $x_\nu \longmapsto x$ die Konvergenz von $m \cdot x$ gegen mx folgt.
Für $0 \neq x \in Q$ ist die Rechtsmultiplikation

$$\varrho_x : Q \longrightarrow Q : m \longmapsto mx$$

nach 1.1.1 (iii) ein Homöomorphismus.

1.1.3 Lemma.

Für zwei kompakte, 0 im Innern enthaltende Teilmengen B,C eines lokalkompakten Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^{2n}$ gibt es eine kompakte Teilmenge A von Q derart, daß $mB \supseteq C$ für alle $m \in Q \setminus A$.

Beweis: O.B.d.A. seien B und C abgeschlossene Kugeln von Q mit Zentrum 0 . Als Bild unter der stetigen Abbildung $\partial B \times C \longrightarrow Q : (b,c) \longmapsto m$ mit $mb = c$ ist $A = \{m \in Q \,/\, (m \cdot \partial B) \cap C \neq \emptyset\}$ kompakt. Nach dem Jordanschen Kurvensatz zerlegt $m \cdot \partial B$ den Raum Q in zwei Zusammenhangskomponenten, von denen $m \cdot B$ die beschränkte ist. Für $m \notin A$ ist $(m \cdot \partial B) \cap C = \emptyset$, C also ganz in einer der beiden Zusammenhangskomponenten enthalten und wegen $0 \in mB \cap C$ daher $C \subseteq mB$. □

Eines der zentralen Hilfsmittel der vorliegenden Arbeit ist nun das folgende

1.1.4 Lemma.

Die auf den Elementen m eines topologischen Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^{2n}$ durch

$$\Delta(m) = \det \lambda_m \geq 0$$

(die Determinante der linearen Abbildung λ_m) definierte modulare Funktion Δ ist stetig. Die Mengen

$$W_r = \{m \in Q \,/\, \Delta(m) \leq r\}$$

bilden für $r > 0$ eine Nullumgebungsbasis aus kompakten Mengen in Q. Für jede kompakte Teilmenge D von Q gibt es andererseits ein $r > 0$ mit $D \subseteq W_r$.

Beweis: Mit der Abbildung $m \longmapsto \lambda_m$ ist auch $\Delta : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig; und wegen $\Delta(1) = 1$ und des Zusammenhangs von $Q \setminus \{0\}$ nimmt Δ (abgesehen von $\Delta(0) = 0$) nur positive Werte an. W_r ist also jedenfalls eine abgeschlossene Nullumgebung . Daß sie beschränkt (und damit kompakt) ist, sieht man folgendermaßen:

Bezeichnet μ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{2n}$ und B eine Kugel vom Maß 1 mit Zentrum 0, so ist $\Delta(m) = \mu(\lambda_m(B)) = \mu(mB)$. Zu einer Kugel C um 0 vom Maß $2r$ existiert nach 1.1.3 eine kompakte Teilmenge A von Q mit $mB \supseteq C$, d.h. $\Delta(m) \geq 2r$ für $m \notin A$; also mit $W_r \subseteq A$.- Wäre weiter $\{W_r \mid r > 0\}$ keine Nullumgebungsbasis, so gäbe es eine beschränkte Folge m_ν in Q mit $\lim_{\nu\to\infty} \Delta(m_\nu) = 0$, die nicht gegen 0 konvergiert. O.B.d.A. könnte dabei m_ν als konvergent gegen $m \neq 0$ angenommen werden; aus der Stetigkeit von Δ würde dann aber $\Delta(m) = 0$ folgen, ein Widerspruch.
Für eine kompakte Teilmenge D von Q ist $\Delta(D)$ kompakt, also $\Delta(D) \leq r$ für geeignetes $r > 0$ und dann $D \subseteq W_r$. □

1.1.5
Der Kern Ker Q eines topologischen Quasikörpers Q besteht definitionsgemäß aus allen Elementen x von Q, die rechtsdistributiv und rechtsassoziativ sind, d.h.

$$(a + b)x = ax + bx \quad \text{und} \quad (ab)x = a(bx)$$

für alle $a,b \in Q$ erfüllen.
Ker Q bildet mit den Verknüpfungen von Q einen topologischen Körper und ist, wie man leicht sieht, abgeschlossen in Q, falls Q hausdorffsch ist.

1.1.6
Der Kern eines echten topologischen Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^{2n}$ enthält das lineare Erzeugnis $\langle 1\rangle$ von 1 als Unterkörper und ist als topologischer Körper isomorph zu
- $\mathbb{R}$ für $\dim Q = 2$
- $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ für $\dim Q = 4$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ für $\dim Q = 8$.

Beweis: Allein mit Hilfe der Linksdistributivität ergibt sich, daß $\mathbb{Z} \subseteq$ Ker Q (wobei wir $k \in \mathbb{N}$ mit $1+1+\ldots+1$ (k mal) $\in Q$ identifizieren). Für $1/k \in Q$ (definiert durch $1/k \cdot k = 1$) gilt daher $[(ab)\cdot 1/k]k = ab = [a(b\cdot 1/k)]k$, folglich $(ab)\cdot 1/k = a(b\cdot 1/k)$ und $[(a+b)\cdot 1/k]k = a+b = (a\cdot 1/k + b\cdot 1/k)k$, folglich $(a+b)\cdot 1/k = a\cdot 1/k + b\cdot 1/k$. Der Körper $\mathbb{Q} = \{j\cdot 1/k \mid 0 \neq k,j \in \mathbb{Z}\} \subseteq \langle 1\rangle$ ist also ein Unterkörper von Ker Q, folglich auch der Abschluß $\langle 1\rangle$ von $\mathbb{Q}$. Insbesondere ist Ker Q nicht total unzusammenhängend und folglich, da ein topologischer Körper, zusammenhängend (vgl. SALZMANN - LOWEN 13.3.4). Nach dem Satz von PONTRJAGIN ist also Ker Q als lokalkompakter zusammenhängender topologischer Körper isomorph

zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Der Rest ergibt sich aus Dimensionsgründen. □

1.2 Automorphismen lokalkompakter zusammenhängender Quasikörper

1.2.1
Jeder (algebraische) Automorphismus eines topologischen Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^{2n}$ ist additiv, multiplikativ und induziert einen Automorphismus von Ker Q, ist also insbesondere ein semilinearer Automorphismus von Q aufgefaßt als Vektorraum über dem Kern.
Im Fall von Ker $Q = \langle 1 \rangle = \mathbb{R}$ ist daher jeder algebraische Automorphismus von Q linear und folglich stetig, da $\mathbb{R}$ außer der Identität keine Körperautomorphismen besitzt. Dasselbe gilt für Ker $Q = \mathbb{H}$, da jeder Automorphismus das zu $\mathbb{R}$ isomorphe Zentrum $\langle 1 \rangle$ von $\mathbb{H}$ in sich überführt.-
Umgekehrt ist allgemein jeder stetige Automorphismus von Q infolge der Additivität linear über $\langle 1 \rangle \subseteq$ Ker Q. Die Gruppe Aut Q der stetigen Automorphismen von Q kann daher aufgefaßt werden als abgeschlossene Untergruppe von $GL(2n,\mathbb{R})$.
Im Fall von Ker $Q = \mathbb{C}$ induzieren die stetigen Automorphismen von Q auf dem Kern entweder die Identität oder die Konjugation, da $\mathbb{C}$ nur diese beiden stetigen Automorphismen besitzt (vgl. SALZMANN - HÄHL III 2.3.3) Die Zusammenhangskomponente $\mathrm{Aut}^1 Q$ von Aut Q induziert auf dem Kern folglich die Identität, besteht also aus über dem Kern linearen Abbildungen und kann daher aufgefaßt werden als abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{C})$.

Das folgende Ergebnis ist eigentlich ein Spezialfall von in §2 (insbesondere 2.3.2) gewonnenen Resultaten über die Kollineationsgruppe topologischer Translationsebenen. Wir leiten es dennoch eigens her, da sich der Beweis in diesem Spezialfall sehr vereinfacht und dabei die zentrale Beweisidee auch für die Ergebnisse des §2 deutlich werden läßt.

1.2.2 Satz.
Die Gruppe Aut Q der stetigen Automorphismen eines topologischen Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^{2n}$ ist kompakt.
Ihre Zusammenhangskomponente $\mathrm{Aut}^1 Q$ wirkt auf Q (bei Einführung einer geeigneten Basis und zugehöriger euklidischer Norm) als Untergruppe der zu $SO(2n-1,\mathbb{R})$ isomorphen Gruppe der eigentlichen Rotationen von $Q = \mathbb{R}^{2n}$,

die 1 festlassen.

Im Fall von Ker $Q = \mathbb{C}$, $Q = \mathbb{C}^n$, ist sogar (bezüglich geeigneter $\mathbb{C}$ - Basis) $\mathrm{Aut}^1 Q \subseteq U(n-1,\mathbb{C}) = \{\varphi \in U(n,\mathbb{C}) \mid \varphi(1) = 1\}$.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}\, Q$. Für die Linksmultiplikation mit $\alpha(m)$, $m \in Q$ gilt dann

$$\lambda_{\alpha(m)} = (x \longmapsto \alpha(m)\cdot x) = (x \longmapsto \alpha^{-1}(x) \longmapsto \alpha(m\cdot\alpha^{-1}(x))) = \alpha \circ \lambda_m \circ \alpha^{-1} .$$

Infolgedessen hat man

$$\Delta(\alpha(m)) = \det \lambda_{\alpha(m)} = \det \alpha \cdot \det \lambda_m \cdot (\det \alpha)^{-1} = \det \lambda_m = \Delta(m) .$$

Insbesondere läßt also $\mathrm{Aut}\, Q$ die kompakten Nullumgebungen $W_r = \{m \in Q \mid \Delta(m) \leq r\}$ aus 1.1.4 invariant.

Mit dem Lebesgue-Maß μ auf $\mathbb{R}^{2n}$ hat man dann

$$\det \alpha = \mu(\alpha(W_1))/\mu(W_1) = \mu(W_1)/\mu(W_1) = 1 ;$$

also ist $\mathrm{Aut}\, Q$ eine Untergruppe von $SL(2n,\mathbb{R})$ und daher abgeschlossen nicht nur in $GL(2n,\mathbb{R})$, sondern sogar im topologischen Raum $\mathcal{C}(Q,Q)$ der stetigen Selbstabbildungen von Q (mit der kompakt-offenen Topologie). Die unter $\mathrm{Aut}\, Q$ invarianten kompakten Mengen W_r, $r > 0$ bilden nach 1.1.4 eine Nullumgebungsbasis und schöpfen andererseits ganz Q aus; $\mathrm{Aut}\, Q$ hat also relativ kompakte Bahnen auf Q und ist, wegen der Additivität von Automorphismen, gleichgradig stetig. Der Satz von Arzela-Ascoli (DUGUNDJI XII 6.4) ergibt nun die Kompaktheit von $\mathrm{Aut}\, Q = \overline{\mathrm{Aut}\, Q} \subseteq \mathcal{C}(Q,Q)$.

$\mathrm{Aut}^1 Q$ ist in der Zusammenhangskomponente $GL^+(2n,\mathbb{R})$ von $GL(2n,\mathbb{R})$ enthalten und, da kompakt und zusammenhängend, linear konjugiert zu einer Untergruppe A der maximalen kompakten Untergruppe $SO(2n,\mathbb{R})$ von $GL^+(2n,\mathbb{R})$. Da $\mathrm{Aut}\, Q$ die 1 festläßt, läßt auch A ein Element von $Q = \mathbb{R}^{2n}$ fest und entspricht also einer Untergruppe von $SO(2n-1,\mathbb{R})$.-

Im Fall von Ker $Q = \mathbb{C}$ schließt man entsprechend mit $GL(n,\mathbb{C})$ anstelle von $GL(2n,\mathbb{R})$ und der maximalen kompakten Untergruppe $U(n,\mathbb{C})$ von $GL(n,\mathbb{C})$. □

Im Fall $n = 1$ ist die Aussage von Satz 1.2.2 längst bekannt; allgemeiner (und schärfer) besitzt sogar jeder 2-dimensionale lokalkompakte Ternärkörper höchstens einen nichtidentischen Automorphismus (SALZMANN (1969) 2.6). Im hier hauptsächlich interessierenden Fall $n = 2$ ergibt sich speziell aus der Kenntnis der Untergruppen von $SO(3)$ bzw. $U(1) = SO(2)$:

1.2.3 Korollar.

Die Gruppe der stetigen Automorphismen eines vierdimensioralen lokalkompakten Quasikörpers ist endlich oder hat Dimension 1 oder 3. Ihre Zusammenhangskomponente ist trivial oder isomorph zu $SO(2)$ bzw. $SO(3)$. Im Fall komplexen Kerns kommt dabei die Dimension 3 nicht vor. □

Die naheliegende Vermutung, daß die lokalkompakten Quasikörper mit einer Automorphismengruppe der höchstmöglichen Dimension relativ leicht zu klassifizieren sein sollten, ließ sich bisher nur für sogenannte distributive Quasikörper und in der hauptsächlich interessierenden Dimension 4 bestätigen; wir wenden uns deshalb dieser speziellen Situation zu.

1.3 Vierdimensionale reelle Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe.

1.3.1 Definition.

Ein Quasikörper Q heißt distributiv, wenn außer der Linksdistributivität auch die Rechtsdistributivität, d.h.

$$(x + y)z = xz + yz$$

für alle $x,y,z \in Q$, gilt.

1.3.2

Ein distributiver topologischer Quasikörper $Q = \mathbb{R}^{2n}$ ist in kanonischer Weise eine Divisionsalgebra über dem zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper $\langle 1 \rangle$ von Ker Q:

Mit $k = 1+1+\ldots+1$ (k mal) $\in Q$ ist für alle $k,m \in \mathbb{N}$ und $x \in Q$ wegen der beidseitigen Distributivität zunächst $mx = xm$, dann

$(m/k\cdot x)k = (m/k\cdot x + \ldots\ldots + m/k\cdot x) = (m/k + \ldots\ldots + m/k)x = mx = xm$,

also

$m/k\cdot x = ((m/k\cdot x)k)\cdot 1/k = (xm)\cdot 1/k = x\cdot m/k$

und folglich, wegen der Stetigkeit der Operationen, $rx = xr$ für alle $r \in \langle 1 \rangle$. Multiplikation von links oder von rechts sind, da stetig und additiv, lineare Abbildungen von Q aufgefaßt als Vektorraum über $\langle 1 \rangle$; und folglich gilt für alle $x,y \in Q$, $r \in \langle 1 \rangle$:

$x(ry) = x(yr) = r(xy) = (xr)y = (rx)y$.-

Umgekehrt ist natürlich jede reelle endlich-dimensionale Divisionsalgebra mit Einselement in kanonischer Weise ein lokalkompakter distributiver Quasikörper.
Im folgenden sei jede Divisionsalgebra als reell-endlichdimensional mit Einselement verstanden und mit der Produkttopologie über $\mathbb{R}$ versehen.

1.3.3

Das Zentrum Z einer solchen Divisionsalgebra D, d.h. die Menge aller Elemente von D, die mit allen anderen kommutieren und in allen Positionen assoziieren, ist ein abgeschlossener kommutativer Unterkörper von D, der (wie eben gezeigt) $\langle 1\rangle$ enthält . Außer im Fall $D = \mathbb{C}$ ist folglich immer

$$Z = \langle 1\rangle \cong \mathbb{R} \quad ,$$

da nach PLAUMANN - STRAMBACH (1973) Satz 1.4 über dem nach dem Satz von PONTRJAGIN ansonsten noch in Frage kommenden Körper $\mathbb{C}$ keine Divisionsalgebren endlicher von 1 verschiedener Dimension existieren.
Ein Isomorphismus zweier solcher (nichtassoziativer) Divisionsalgebren führt dann das Zentrum $\langle 1\rangle$ in $\langle 1\rangle$ über und zwar in augenscheinlicher Weise (da der Körper $\mathbb{R}$ keine nichtidentischen Automorphismen besitzt; $r\cdot 1$ wird auf $r\cdot 1$ abgebildet); so daß jeder solche Isomorphismus linear über dem Zentrum und folglich stetig ist.

Bemerkung: Ist D zweidimensional, so rechnet man unmittelbar nach, daß die Multiplikation von D kommutativ und folglich (vgl. etwa BETTEN (1972) Satz 1c) D isomorph zum Körper der komplexen Zahlen ist. Echte Divisionsalgebren gibt es also nur in den reellen Dimensionen 4 und 8 .-

Im Zusammenhang mit projektiven Ebenen klassifiziert man bekanntlich Divisionsalgebren zweckmäßigerweise nicht bis auf Isomorphie, sondern gröber mit Hilfe des folgenden Begriffs:

1.3.4 Definition.

Zwei Divisionsalgebren D_1 und D_2 heißen (linear) isotop, wenn es ein Tripel linearer bijektiver Abbildungen (P,B,C) (einen Isotopismus)

von D_1 auf D_2 gibt derart, daß

$$C(mx) = P(m)\cdot B(x)$$

für alle $m,x \in D_1$.

In der Literatur wird von P,B,C in der Regel nicht die Linearität, sondern nur Additivität verlangt; dann gilt allgemein, daß zwei Divisionsalgebren über demselben Körper genau dann isomorphe affine Ebenen koordinatisieren, wenn sie (additiv) isotop sind (vgl. etwa HUGHES - PIPER Theorem 8.11) . Im uns hier interessierenden Fall reeller Divisionsalgebren werden wir diese Aussage auf Linearität verschärfen können; entsprechendes gilt für endliche Divisionsalgebren (ALBERT).

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von

1.3.5 Satz.

a) Die vierdimensionalen reellen Divisionsalgebren mit Einselement und dreidimensionaler Automorphismengruppe sind bis auf Isomorphie genau die Algebren

D_τ mit Basis $\{1,i,j,k\}$, Einselement 1 und Multiplikationstafel
$i^2 = j^2 = k^2 = -\tau$; $ij = -ji = k$; $ki = -ik = j$; $jk = -kj = i$,

wobei $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.
Die Automorphismengruppe von D_τ besteht gerade aus allen eigentlichen Rotationen von $\langle i,j,k\rangle$.

b) D_τ und D_σ sind isotop genau dann, wenn $\tau = \sigma$.

In Verallgemeinerung eines Resultats von SALZMANN (1970) auf höhere Dimensionen zeigen wir zunächst:

1.3.6 Lemma.

In einem topologischen Quasikörper $Q = \mathbb{R}^m$ (mit $m > 1$) ist jedes Element ein Quadrat, d.h. $Q \longrightarrow Q : x \longmapsto x\cdot x$ ist surjektiv.

Beweis: Sei S eine Sphäre in $\mathbb{R}^m = Q$ um 0 (bezüglich der euklidischen Metrik) mit $1 \in S$; ϱ die kanonische Retraktion von $Q^\times = Q \setminus \{0\}$ auf S . Mit der Multiplikation als Verknüpfung ist $Q^\times$ ein H-Raum im Sinne von SPANIER 1.3.5 . Da die Einbettung von S in $Q^\times$ ein Repräsentant von $1 \in \mathbb{Z} = \pi_{m-1}(Q^\times)$ ist und für den H-Raum $Q^\times$ die Verknüpfung in den Homotopiegruppen sich durch punktweise Verknüpfung in $Q^\times$ darstellen läßt (SPANIER 1.6.9), ist

$S \longrightarrow Q^X : x \longmapsto x \cdot x$ ein Repräsentant von $2 \in \pi_{m-1}(Q^X)$, also $\psi : S \longrightarrow S : x \mapsto \varrho(x^2)$ eine Abbildung vom Grad 2. Ist nun S_r eine Sphäre um 0 mit beliebigem Radius r und $\iota_r : S \longrightarrow S_r$ die radiale Projektion, so erweist sich

$$\psi_r : S \longrightarrow S : x \longmapsto \varrho((\iota_r x)^2)$$

vermöge Variation von r als homotop zu ψ und damit insbesondere als surjektiv.

Mit anderen Worten: Auf jedem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl von $Q = \mathbb{R}^m$ liegen Quadrate von Elementen aus S_r; wenn man r stetig zwischen 0 und ∞ variiert, überstreichen diese stetig den ganzen Strahl. □

Beweis von Satz 1.3.5

a) Sei $D = \mathbb{R}^4$ eine Divisionsalgebra mit Einselement 1 und dreidimensionaler Automorphismengruppe. Bezüglich einer geeigneten Basis (und zugehöriger euklidischer Norm $|\ |$) ist dann nach 1.2.2

$$\mathrm{Aut}^1 D = SO(3) = \{\varphi \in SO(4) / \varphi(1) = 1\} .$$

Sei im folgenden $V = \langle 1 \rangle^\perp$ der zu $\langle 1 \rangle$ orthogonale dreidimensionale Unterraum von D; die Elemente von 1 werden reell, die von V rein genannt.

a1) D ist quadratisch, also monoassoziativ.

Nach 1.3.6 existiert nämlich ein $r + zs \in D$ (r,s reell; z rein) mit $(r + zs)^2 = r^2 + 2z \cdot rs + z^2 \cdot s^2 = -1$.

Dabei muß $s \neq 0$ sein, da Quadrate reeller Elemente positiv sind. Folglich ist

$z^2 = u + zt$ (u,t reell)

und eine formal gleiche Beziehung gilt dann wegen der Transitivität von Aut D auf den 1-dimensionalen Teilräumen von V für alle reinen Elemente z, damit aber für alle $z \in D$.-

a2) Aus der Monoassoziativität von D folgt nun, daß $\{x \in D / x^2$ reell, $x^2 \leq 0\}$ ein dreidimensionaler Untervektorraum von $D = \mathbb{R}^4$ ist (BOS (1965), vgl. SALZMANN-LOWEN 13.4.5). Er ist in-

variant unter den Automorphismen von D ; und da es nur einen einzigen unter $\mathrm{Aut}^1 D$ invarianten dreidimensionalen Teilraum gibt, nämlich den Unterraum V der reinen Elemente, ergibt sich also

$$V = \{x \in D \,/\, x^2 \text{ reell}, x^2 \leq 0\} \quad .-$$

a3) Seien nun $x,y \in V$ orthogonal mit $|x| = |y|$. Dann gilt: $xy + yx = 0$; $xy \in V$; xy ist orthogonal zu x und y .

In der Tat: Ist $a \in V$ orthogonal zu x und y und φ der durch Drehung um a mit Winkel $\pi/2$ bestimmte Automorphismus von D mit $\varphi(x) = y$; $\varphi(y) = -x$, so hat man

$$\varphi(xy + yx) = -(xy + yx) \quad ;$$

und da φ die reellen Anteile festläßt, ist folglich zunächst der reelle Anteil von $xy + yx$ gleich 0 , also $xy + yx \in V$. In V läßt aber φ nur einen eindimensionalen Teilraum invariant (nämlich $\langle a \rangle$) und diesen sogar punktweise fest; folglich ist sogar $xy + yx = 0$.

Der durch Drehung an der Winkelhalbierenden von x und y um den Winkel π bestimmte Automorphismus ψ von D liefert nun weiter

$$\psi(xy) = yx = -xy$$

und da ψ reelle Anteile erhält, muß folglich $xy \in V$ sein. Wegen $\varphi(xy) = -yx = xy$ ist daher $xy \in \langle a \rangle$, d.h. xy orthogonal zu x und y .-

a4) Wegen $xy \in V$ ist nun

$$(xy)^2 = -1/\tau$$

für geeignetes $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.- Da die Automorphismengruppe SO(3) transitiv auf den eindimensionalen Teilräumen von V ist und reelle Anteile erhält, haben die betragsgleichen Elemente x und y von V gleiches negatives Quadrat und wir können o.B.d.A. annehmen, daß

$$x^2 = y^2 = -1 \quad .$$

Aus demselben Grund ist dann, für

$$i = x \cdot \sqrt{\tau} \; ; \quad j = y \cdot \sqrt{\tau} \; ; \quad k = (xy) \cdot \tau$$

$|i| = |j| = |k|$, da

$$i^2 = j^2 = k^2 = -\tau \quad .$$

Nach Definition und wegen a3) ist dann $ij = -ji = (xy)\tau = k$; und da die zyklische Vertauschung von i,j,k durch Elemente von SO(3), also Automorphismen der Algebra, realisiert werden kann, hat man für $\{1,i,j,k\}$

die Multiplikationstabelle der Algebra D_τ .

a5) Daß andererseits D_τ für jedes $\tau > 0$ eine Divisionsalgebra ist, zeigt die direkte Berechnung der Determinanten von Links- und Rechtsmultiplikation mit $m = 1\cdot m_1 + i\cdot m_2 + j\cdot m_3 + k\cdot m_4 \in D$; sie ergeben sich als

$$\det \lambda_m = \det \varrho_m = (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)\cdot(m_1^2 + \tau m_2^2 + \tau m_3^2 + \tau m_4^2) \qquad (1)$$

und sind für $m \neq 0$ von 0 verschieden.-

b) Wir beweisen nun die Isotopieaussage; als Nebenprodukt wird sich gleichzeitig die Automorphismengruppe genau bestimmen lassen. Zunächst ist - wegen $(i^2)j = -j\cdot\tau$; $i(ij) = ik = -j$ - die Algebra D_τ genau dann assoziativ, d.h. ein Körper, wenn $\tau = 1$ (man beachte $D_1 = \mathbb{H}$) . Da Isotopie die Assoziativität erhält (vgl. PICKERT 2.2), können wir aus den weiteren Überlegungen den Fall $\tau = 1$ ausschließen.

Sei also (P,B,C) eine Isotopie von D_τ auf D_σ für von 1 verschiedene $\tau,\sigma > 0$; d.h. für alle $m,x \in D_\tau$ gelte

$$C(m \mathbin{;}_\tau x) = P(m) \mathbin{;}_\sigma B(x) \qquad . \qquad (2)$$

In der Folge seien alle Elemente von D_τ und D_σ als 4-Tupel reeller Zahlen und die linearen Abbildungen P,B,C als Matrizen bezüglich der Basen $\{1,i,j,k\}$ von D_τ bzw. D_σ dargestellt, sowie D_τ und D_σ entlang dieser Basen als Vektorräume identifiziert.

b1) Mit den beiden quadratischen Formen

$$N_\tau(x) = x_1^2 + \tau(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$
$$N(x) = N_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

hat man nun für alle $x \in D_\tau$ aufgrund (1), daß

$$\begin{aligned} N(x)\cdot N_\tau(x) &= \det(m \longmapsto m \mathbin{;}_\tau x) = \det\,(m \longmapsto C^{-1}(P(m) \mathbin{;}_\sigma B(x))) \\ &= \det C^{-1} \cdot \det P \cdot \det\,(m \longmapsto m \mathbin{;}_\sigma B(x)) \qquad (3) \\ &= c\cdot N(Bx)\cdot N_\sigma(Bx) \end{aligned}$$

(wobei c konstant). Mit N_σ ist auch $x \longmapsto N_\sigma(Bx)$ eine quadratische Form. Um Rückschlüsse über B zu erhalten, möchte man aus (3) folgern, daß diese bis auf eine Konstante mit N oder N_τ übereinstimmt. Da der Polynomring $\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3,x_4]$ eindeutige Primzerlegung gestattet (van der WAERDEN § 26) und da die hier betrachteten quadratischen Formen als Elemente dieses Rings aufgefaßt werden können, ist hierzu nur zu

zeigen:

b2) $x_1^2 + \tau(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$ ist prim in $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_4]$.

Angenommen, es gäbe zwei Faktoren f und g . Aus der Betrachtung der homogenen Teile folgt, daß f und g dann beide Grad 1 haben müßten:

$f = \alpha + \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_\nu x_\nu$; $g = \beta + \sum_{\nu=1}^{4} \beta_\nu x_\nu$.

f und g dürften nur die Nullstelle $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ in $\mathbb{R}^4$ haben und einer der beiden Faktoren müßte diese Nullstelle haben; folglich ist $\alpha = \beta = 0$. Aus $\alpha_1\beta_1 = 1$, $\alpha_\nu\beta_\nu = \tau$ $(\nu \geqslant 2)$ würde andererseits $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\nu \neq 0$ folgen und außer der trivialen Nullstelle lägen dann doch noch weitere vor, ein Widerspruch .-

b3) Insgesamt folgt aus (3) also, daß einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

Fall 1. $N(Bx) = c_1 \cdot N(x)$ und $N_\sigma(Bx) = c_2 \cdot N_\tau(x)$

für alle $x \in D_\tau$ und gewisse Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$; insbesondere sind

$$B \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\sigma} & \\ & & \sqrt{\sigma} \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\tau} & \\ & & \sqrt{\tau} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{Drehstreckungen}$$

(eventuell uneigentliche), da sie die euklidische Norm N bis auf einen konstanten Faktor erhalten; entsprechend

Fall 2. $N(Bx) = c_1 \cdot N_\tau(x)$ und $N_\sigma(Bx) = c_2 \cdot N(x)$; und es sind

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\sigma} & \\ & & \sqrt{\sigma} \end{pmatrix} \cdot B \quad \text{sowie} \quad B \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\tau} & \\ & & \sqrt{\tau} \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{Drehstreckungen .}$$

Ferner gilt

b4) Ein dreidimensionaler Untervektorraum W von D_σ mit $N_\sigma(y) = c \cdot N(y)$ für alle $y \in W$ (c konstant) ist identisch mit $V = \langle i,j,k \rangle$.

$W \cap V$ ist nämlich mindestens zweidimensional und für $0 \neq y \in W \cap V$ gilt dann $c \cdot N(y) = N_\sigma(y) = \sigma \cdot N(y)$, woraus $c = \sigma$ folgt. Für $y = (y_1,y_2,y_3,y_4) \in W$ hat man also $\sigma y_1^2 + \sigma(y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = y_1^2 + \sigma(y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$ und wegen $\sigma \neq 1$ folgt $y_1 = 0$, also $W = V$.

b51) Im Fall 1 ist nun für alle $y \in V$

$N_\sigma(By) = c_2 \cdot N_\tau(y) = c_2 \cdot \tau \cdot N(y) = c_2/c_1 \cdot \tau \cdot N(By)$

und folglich, nach b4), $B(V) = V$. Die Drehstreckung B läßt dann auch $\langle 1 \rangle$ invariant und kommutiert mit aller Streckungen von V. Folglich ist sogar

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\sigma} & \\ & & \sqrt{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\tau} & \\ & & \sqrt{\tau} \end{pmatrix}^{-1}$$ eine Drehstreckung,

woraus $\sigma = \tau$ folgt.

b52) Im Fall 2 ergibt sich ähnlich $N_\sigma(By) = c_2/(\tau \cdot c_1) \cdot N(By)$ für $y \in V$ und folglich mit b4) $B(V) = V$. Die in Fall 2 genannten Drehstreckungen lassen folglich ebenfalls V und damit auch $\langle 1 \rangle$ invariant; wieder läßt dann auch B den Unterraum $\langle 1 \rangle$ invariant und kommutiert mit allen Streckungen von V, so daß diesmal

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\sigma} & \\ & & \sqrt{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\tau} & \\ & & \sqrt{\tau} \end{pmatrix}$$ eine Drehstreckung

und folglich $\sigma = 1/\tau$ ist. Dieser Fall soll im weiteren nooh ausgeschlossen werden.

b6) In beiden Fällen ergibt sich also, daß B die Teilräume $\langle 1 \rangle$ und V in sich überführt. Da gleichzeitige Streckung von B und C - wie man an (2) erkennt - wieder zu einer Isotopie führt, kann O.B.d.A. $B(1) = 1$ angenommen werden.
Völlig parallele Argumente für P statt für B - wobei statt der Determinante der Linksmultiplikation die der Rechtsmultiplikation zu verwenden ist - zeigen, daß auch P modulo einer Streckung so gewählt werden kann, daß $P(1) = 1$.
(2) einmal mit $m = 1$, einmal mit $x = 1$ zeigt, daß dann $C = P = B$, daß also nicht nur eine Isotopie vorliegt, sondern B ein Isomorphismus von D_τ auf D_σ ist.
Da die eigentlichen Rotationen von $V = \langle i,j,k \rangle$ Automorphismen von D_τ und D_σ sind und da wir im Fall 2 (mit $\sigma = 1/\tau$)

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{\sigma} & \\ & & \sqrt{\sigma} \end{pmatrix} \cdot B$$

als (eventuell uneigentliche) Drehstreckung (mit V in V und $\langle 1 \rangle$ in $\langle 1 \rangle$)

erkannt haben, wäre also in diesem Fall auch

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \pm\sqrt{\sigma} & \\ & & \pm\sqrt{\sigma} \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus von $D_{1/\sigma}$ auf D_σ ; folglich wäre $-1/\sigma = (i\ {}_{1/\sigma}\ i) = (\pm\sqrt{\sigma}\ {}_{\sigma}\ \pm\sqrt{\sigma}) = -\sigma^2$ und also $\sigma = 1$, im Widerspruch zu den Annahmen.

Es bleibt also nur die Fall 1 von b3) entsprechende Möglichkeit $\sigma = \tau$, womit die Isotopiefrage entschieden ist.

Ferner zeigt nun b3), daß insbesondere jeder Automorphismus von D_τ eine Drehung um $\langle 1\rangle$ ist. Da unter diesen die eigentlichen Drehungen alle als Automorphismen von D_τ vorkommen, andererseits aber die typische uneigentliche Drehung $i \longmapsto -i;\ j \longmapsto -j;\ k \longmapsto -k$ kein Automorphismus ist, können nur gerade die eigentlichen Drehungen dieser Art Automorphismen sein, womit schließlich die Automorphismengruppe von D_τ vollständig bestimmt ist.-

Gleichzeitig hat sich noch die folgende die Kollineationsgruppe der affinen Ebene über D_τ bestimmende Aussage ergeben:

1.3.7 Korollar.

Die Autotopismen von D_τ $(1 \neq \tau > 0)$ sind genau die Tripel (P,B,C) mit

$$P = s\cdot\varphi\ ;\quad B = r\cdot\varphi\ ;\quad C = (rs)\cdot\varphi\ ,$$

wo $r,s \in R^\times$ und φ ein Automorphismus von D_τ ist. □

§ 2 Die Kollineationsgruppe kompakter zusammenhängender Translationsebenen

2.1 Allgemeines

2.1.1

Eine topologische projektive Ebene $\mathcal{P}$ ist eine projektive Ebene, bei der die Punktmenge $\mathbb{P}$ und die Geradenmenge $\mathcal{L}$ so mit einer Topologie versehen sind, daß die Operationen Verbinden $(\vee)$ und Schneiden $(\wedge)$ stetig sind.

Im folgenden befassen wir uns nur mit kompakten Translationsebenen (d.h. topologischen Translationsebenen, deren Punktraum kompakt ist) mit einem Punktraum der Dimension > 2 (die Dimensionseinschränkung erfolgt, um den schwer traktablen Fall total unzusammenhängender Ebenen auszuschließen und da nach SALZMANN (1967) 7.24 die klassische reelle projektive Ebene die einzige kompakte Translationsebene der Dimension 2 ist).

Ist L_∞ die Translationsachse (''uneigentliche Gerade'') einer solchen Translationsebene $\mathcal{P}$, und sind S,W verschiedene eigentliche (d.h. von L_∞ verschiedene) Geraden, so wird die affine Ebene $\mathcal{A} = \mathcal{P} \setminus L_\infty$ bezüglich den Bezugspunkten $O = S \wedge W$, $s = S \wedge L_\infty$, $w = W \wedge L_\infty$ und einem Einheitspunkt $e \notin S \cup W \cup L_\infty$ durch einen lokalkompakten Quasikörper positiver Dimension $Q = \mathbb{R}^n$ $(n = 2,4,8)$ koordinatisiert (SALZMANN (1967) §7). Der Punktraum $\mathbb{P}$ ist also eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ und die Geraden - die wir mit der Menge der auf ihnen liegenden Punkte identifizieren - sind homöomorph zur n-Sphäre S^n (BREITSPRECHER(1971) 2.1). Die Punktmenge $\mathbb{A}$ der affinen Ebene $\mathcal{A}$ trägt (als Produkt $Q \times Q$) in kanonischer Weise die Struktur eines (Rechts-)Vektorraums über dem Kern Ker Q von Q. Die affinen von $S = \{0\} \times Q$ verschiedenen Geraden durch $O = S \wedge W$ sind von der Form

$$\{(x, mx) \mid x \in Q\}$$

für irgendein festes $m \in Q$; und da die Linksmultiplikation mit m linear über Ker Q ist, sind also in dieser (hier stets verwendeten) Darstellung die Geraden durch O über Ker Q lineare Unterräume von $Q \times Q$ der reellen Dimension n.

Die Translationsgruppe T von $\mathcal{P}$ entspricht dabei gerade den Translationen im üblichen Sinn in $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$. Die Streckungsgruppe $G_{[O,L_\infty]}$

der Kollineationen von $\mathfrak{P}$ mit Zentrum 0 und Achse L_∞ ergibt sich in affinen Koordinaten als

$$G_{[0,L_\infty]} = \{(x,y) \longmapsto (xc,yc) \;/\; c \in \mathrm{Ker}\, Q \setminus \{0\}\} \quad ,$$

also als die Gruppe der Streckungen über Ker Q im üblichen Sinn (siehe etwa PICKERT 8.4.2) . Dies zeigt bekanntlich unter anderem, daß der Kern eines koordinatisierenden Quasikörpers von der Wahl der Bezugspunkte unabhängig ist. In diesem Sinne sprechen wir gelegentlich vom Kern der Ebene.
Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, betrachten wir häufig die hier angegebenen linearen Strukturen über dem zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper $\langle 1\rangle$ von Ker Q als Grundkörper.

2.1.2

Ist $\mathfrak{P}$ nicht isomorph zur klassischen Ebene über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder den Oktaven $\mathbb{O}$ (d.h. nicht moufangsch, vgl. SALZMANN (1967) 7.25 und 7.27), so hält die volle Kollineationsgruppe von $\mathfrak{P}$ die uneigentliche Gerade L_∞ fest (PICKERT 8.3; BETTEN (1972) Lemma 5), ist also gleich der affinen Kollineationsgruppe G .
Da hier im wesentlichen die nichtklassischen Ebenen im Blickpunkt stehen und um andererseits die klassischen Ebenen nicht andauernd explizit ausschließen zu müssen, sei hier im folgenden unter der Kollineationsgruppe stets die affine Gruppe G verstanden.

2.1.3

Für die Standgruppe G_0 von G im eigentlichen Punkt 0 gilt

$$G = G_0 \cdot T = T \cdot G_0 \quad .$$

Nach ANDRÉ 3 Satz 19 oder PICKERT 8.3.8 besteht G_0 aus über Ker Q semilinearen Automorphismen von $\mathbb{A} = Q \times Q$.
Im Fall Ker $Q = \langle 1\rangle = \mathbb{R}$ oder Ker $Q = \mathbb{H}$ sind die Kollineationen aus G_0 folglich stets linear über $\mathbb{R}$: Im ersten Fall, da $\mathbb{R}$ keine nichtidentischen Körperautomorphismen besitzt; im zweiten Fall, da jeder Automorphismus von $\mathbb{H}$ das Zentrum $\langle 1\rangle = \mathbb{R}$ in sich überführt und dort die Identität induziert. Insbesondere sind in diesen Fällen alle Kollineationen stetig.
Im Fall Ker $Q = \mathbb{C}$ sind gerade die stetigen Kollineationen linear über $\mathbb{R}$, da die einzigen stetigen Automorphismen von $\mathbb{C}$ (Identität und Konjugation) gerade diejenigen sind, die $\langle 1\rangle = \mathbb{R}$ elementweise fest-

lassen (vgl. etwa SALZMANN - HÄHL III 2.3.3).

2.2 Die Kollineationsgruppe als topologische Gruppe

Die affine Kollineationsgruppe G wird mit der kompakt-offenen Topologie eine topologische Gruppe.

Das nachstehende Ergebnis ist eine Adaption von Argumenten von SALZMANN (197o), die eine entsprechende Aussage für beliebige 4-dimensionale kompakte projektive Ebenen zeigen. Es sei hier darauf verzichtet, eine allgemeine Fassung zu geben, die auch Nicht-Translationsebenen einschließt (was bei gleicher Grundidee ohne weiteres möglich wäre): im Fall von Translationsebenen ist die technische Darlegung wesentlich simpler.

2.2.1

Die Untergruppe der stetigen Kollineationen ist offen in G .

Beweis: Ist der Kern der Ebene $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{H}$, so sind alle Kollineationen stetig (2.1.3) und es ist nichts zu beweisen. Ist der Kern der Ebene $\mathbb{C}$, so zeigen wir, daß eine geeignete Umgebung

$[K,U] = \{\gamma \in G \mid \gamma(K) \subseteq U\}$ (K kompakt, U offen in $\mathbb{A}$, $K \subseteq U$)

der Identität keine unstetige Kollineation $\gamma \in G$ enthalten kann. Man wählt hierzu $0 \neq p \in \mathbb{A} = Q \times Q$ sowie eine Strecke I in $\mathbb{C}$ und faßt $\mathbb{A}$ als Vektorraum über dem Kern $\mathbb{C}$ auf. $K = p \cdot I \subseteq \mathbb{A}$ ist dann kompakt; sei U eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{A}$ mit $K \subseteq U$. Nun ist $\gamma = \tau \circ \gamma'$ mit einer (stetigen) Translation τ und einem unstetigen $\gamma' \in G_0$. Nach 2.1.3 ist γ' semilinear über $\mathbb{C}$ mit einem unstetigen Begleitautomorphismus α von $\mathbb{C}$; und nach KESTELMANN ist $\alpha(I)$ dicht in $\mathbb{C}$, folglich ist die Menge $\gamma'(p \cdot I) = \gamma'(p) \cdot \alpha(I)$ und damit auch $\gamma(K)$ unbeschränkt in $\mathbb{A}$, also ist $\gamma(K)$ nicht in U enthalten. □

A priori hätte man noch zu präzisieren, ob für die kompakt-offene Topologie von G die Punktmenge $\mathbb{P}$ der projektiven Ebene oder die Punktmenge $\mathbb{A}$ der affinen Ebene als topologischer Raum zugrunde gelegt wird. Jedoch zeigt sich

2.2.2

Die kompakt-offenen Topologien auf der affinen Gruppe G bezüglich $\mathbb{P}$ bzw. $\mathbb{A}$ stimmen überein.

Beweis: Seien $G_{\mathbb{A}}$ und $G_{\mathbb{P}}$ die jeweils entstehenden topologischen Gruppen; man hat zu verifizieren, daß die kanonische Abbildung

$G_{\mathbb{A}} \longrightarrow G_{\mathbb{P}}$ stetig in beiden Richtungen ist. Da es sich um einen Gruppenisomorphismus handelt, genügt der Nachweis der Stetigkeit im Neutralelement und wegen 2.2.1 kann man sich folglich auf die Untergruppe Σ der stetigen Kollineationen beschränken. Die Stetigkeit von $\Sigma_{\mathbb{P}} \longrightarrow \Sigma_{\mathbb{A}}$ folgt unmittelbar aus der Definition der kompakt-offenen Topologie. Da $\mathbb{P}$ und $\mathbb{A}$ und folglich (DUGUNDJI XII 5.2) auch $\Sigma_{\mathbb{P}}$ und $\Sigma_{\mathbb{A}}$ abzählbare Basis haben, genügt für den Beweis der Stetigkeit im Neutralelement in umgekehrter Richtung ein Folgenargument. Da $\mathbb{A}$ und $\mathbb{P}$ metrisierbar sind, hat man, mit einem bekannten Kriterium (DUGUNDJI XII 7.5) für Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie, also zu zeigen, daß für eine in $\Sigma_{\mathbb{A}}$ gegen 1 konvergente Folge von Kollineationen γ_ν und für eine in $\mathbb{P}$ gegen y konvergente Punktfolge y_ν stets $\lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu(y_\nu) = y$. Da $\mathbb{P}$ kompakt ist, kann man dabei über Teilfolgenargumente o.B.d.A. annehmen, daß $\gamma_\nu(y_\nu)$ in $\mathbb{P}$ gegen ein y' konvergiert und hat dann $y = y'$ zu zeigen.

Für beliebiges von y und y' verschiedenes $x \in \mathbb{A}$ wählt man hierzu eine von L_∞ verschiedene Gerade L mit $x \notin L$ und $(x \vee y) \wedge L \in \mathbb{A}$. Es gilt

$$\gamma_\nu[(x \vee y_\nu) \wedge L] = [\gamma_\nu(x) \vee \gamma_\nu(y_\nu)] \wedge \gamma_\nu(L) \qquad (1$$

(nach den Voraussetzungen sind zumindest für genügend große ν alle vorkommenden Schnitte und Vereinigungen wohldefiniert).

Da γ_ν in $\Sigma_{\mathbb{A}}$ gegen id und (wegen $y \notin L$) die Punkte $(x \vee y_\nu) \wedge L$ gegen $(x \vee y) \wedge L \in \mathbb{A}$ konvergieren, konvergiert die linke Seite von (1) gegen $(x \vee y) \wedge L$. Die rechte Seite konvergiert gegen $(x \vee y') \wedge L$; folglich ist $y' \in (x \vee y)$ - und dies für alle $x \in \mathbb{A} \setminus \{y, y'\}$, woraus $y = y'$ folgt. □

G ist auch eine Kollineationsgruppe der dualen Ebene $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{P}$ und kann daher auch mit der kompakt-offenen Topologie bezüglich der Punktmenge von $\mathcal{P}^*$, also der Geradenmenge $\mathcal{L}$ von $\mathcal{P}$, betrachtet werden. Man hat jedoch auch hier

2.2.3

Die kompakt-offenen Topologien auf G bezüglich $\mathbb{P}$ bzw. $\mathcal{L}$ stimmen überein.

Beweis: Seien $G_{\mathbb{P}}$ bzw. $G_{\mathcal{L}}$ die jeweils entstehenden topologischen Gruppen. Infolge der Dualität der Situation genügt der Beweis der

Stetigkeit der natürlichen Abbildung $G_{\mathbb{P}} \longrightarrow G_{\mathcal{L}}$. Wie in 2.2.2 kann man sich auf Folgen und stetige Kollineationen beschränken und hat zu zeigen, daß für eine Folge stetiger Kollineationen γ_ν , die in $G_{\mathcal{L}}$ gegen die Identität konvergiert und für eine gegen $x \in \mathbb{P}$ konvergente Punktfolge x_ν stets $\lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu(x_\nu) = x$ gilt. Man wählt hierzu verschiedene Punkte $p,q \in \mathbb{P}$, die außerhalb der kompakten Menge $\{x_\nu / \nu \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ liegen; für die Geraden $L_\nu = x_\nu \vee p$, $M_\nu = x_\nu \vee q$ hat man dann $\lim_{\nu\to\infty} L_\nu = x \vee p$, $\lim_{\nu\to\infty} M_\nu = x \vee q$; wegen $\lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu(L_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} L_\nu$ und der entsprechenden Aussage für M_ν ist $\gamma_\nu(L_\nu) \wedge \gamma_\nu(M_\nu)$ zumindest für genügend große ν definiert und gleich $\gamma_\nu(x_\nu)$ und folglich ist $\lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu(x_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu(L_\nu) \wedge \lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu(M_\nu) = (x \vee p) \wedge (x \vee q) = x$, was zu zeigen war. □

2.2.4

Die Gruppe Σ der stetigen affinen Kollineationen induziert auf der Fixgeraden L_∞ eine Homöomorphismengruppe, die mit $\Sigma|L_\infty$ bezeichnet und mit der kompakt-offenen Topologie (bezüglich L_∞) versehen sei. $\Sigma|L_\infty$ ist dann ebenfalls eine topologische Gruppe und die kanonische Abbildung

$$\Phi : \Sigma \longrightarrow \Sigma|L_\infty$$

ein stetiger Epimorphismus, wie man unmittelbar verifiziert.

Das folgende Lemma dient der näheren Untersuchung der Beziehungen zwischen Σ und $\Sigma|L_\infty$:

2.2.5 Lemma.

Sei $\sigma_\nu \in \Sigma_0$ eine Folge den Punkt 0 festlassender stetiger affiner Kollineationen von $\mathcal{P}$ derart, daß $\sigma_\nu|L_\infty$ in $\Sigma|L_\infty$ gegen die Identität konvergiert.

Gibt es einen affinen Punkt $0 \neq p \in \mathbb{A}$ so, daß $\sigma_\nu(p)$ gegen einen affinen Punkt $q \neq 0$ konvergiert, so konvergiert σ_ν in Σ_0 gegen eine Streckung $\sigma \in G_{[0,L_\infty]}$.

Beweis:

a) Sei $L_1 = 0 \vee p$; $z = L_1 \wedge L_\infty$. Dann ist $\sigma_\nu(p) \in 0 \wedge \sigma_\nu(z)$, und da $\sigma_\nu(z)$ gegen z konvergiert, ist $q = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(p) \in 0 \vee z = L_1$.

Auf der durch Herausnehmen der Geraden L_1 entstehenden affinen Ebene $\mathbb{A}_1 = \mathbb{P} \setminus L_1$ definieren wir eine Abbildung σ durch

$$\sigma(y) = [q \vee ((p \vee y) \wedge L_\infty)] \wedge (0 \vee y) \quad , \quad y \in \mathbb{A}_1 \quad .$$

Wie man unmittelbar verifiziert, ist σ ein Homöomorphismus von $\mathbb{A}_1$ in sich.

b) Die auf $\mathbb{A}_1$ eingeschränkten Kollineationen $\sigma_\nu : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{P}$ konvergieren (bezüglich irgendeiner Metrik von $\mathbb{P}$) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{A}_1$ gegen σ.
Sonst gäbe es nämlich eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{A}_1$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_\nu \in K$ derart, daß $\sigma_\nu(x_\nu) \notin K_\varepsilon(\sigma(x_\nu))$. O.B.d.A. könnten wir annehmen, daß x_ν gegen $x \in K \subseteq \mathbb{A}_1$ und $\sigma_\nu(x_\nu)$ gegen $y \in \mathbb{P}$ konvergiert; und wegen der Stetigkeit von σ wäre y jedenfalls von $\sigma(x)$ verschieden.
Für $z_\nu = (0 \vee x_\nu) \wedge L_\infty$ hätte man andererseits, wegen der Konvergenz von $\sigma_\nu | L_\infty$ gegen die Identität, $\lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(z_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} z_\nu = (0 \vee x) \wedge L_\infty$ und folglich wäre, wegen $\sigma_\nu(x_\nu) \in 0 \vee \sigma_\nu(z_\nu)$,

$$y = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(x_\nu) \in 0 \vee x \quad .$$

Für $\zeta_\nu = (p \vee x_\nu) \wedge L_\infty$ hätte man entsprechend $\lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(\zeta_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \zeta_\nu = (p \vee x) \wedge L_\infty$ und folglich wäre, wegen $\sigma_\nu(x_\nu) \in \sigma_\nu(p) \vee \sigma_\nu(\zeta_\nu)$,

$$y = \lim_{\nu\to\infty} \sigma_\nu(x_\nu) \in q \vee ((p \vee x) \wedge L_\infty) \quad ;$$

nach Definition insgesamt also doch $y = \sigma(x)$, ein Widerspruch.

c) σ_ν konvergiert also insbesondere auf allen Punkten von $\mathbb{A}_1$ punktweise. Indem man nun in den vorstehenden Argumenten L_1 durch eine von L_1 verschiedene Gerade $L_2 \ni 0$ ersetzt und statt p einen eigentlichen Punkt $p_2 \in L_2$, $p_2 \neq 0$ verwendet, erhält man, daß σ_ν in der affinen Ebene $\mathbb{A}_2 = \mathbb{P} \setminus L_2$ ebenfalls gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{A}_2$ gegen einen Homöomorphismus von $\mathbb{A}_2$ in sich konvergiert, der auf $\mathbb{A}_1 \cap \mathbb{A}_2$ natürlich mit σ übereinstimmt. Insgesamt konvergiert σ_ν in $\mathbb{P} \setminus \{0\}$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen gegen eine Abbildung σ von $\mathbb{P} \setminus \{0\}$ in sich, die auf $\mathbb{A}_i$ $(i = 1,2)$ Homöomorphismen induziert und alle Geraden durch 0 invariant läßt. Insbesondere werden L_1 und L_2 in sich übergeführt und folglich ist σ ein Homöomorphismus von $\mathbb{P} \setminus \{0\}$ in sich (da nur in $L_1 \cup L_2$ die Injektivität von σ gestört sein könnte). $\mathbb{P} \setminus \{0\}$ ist nun die Geradenmenge einer affinen Ebene der dualen Ebene $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{P}$ und σ als Grenzwert von Kollineationen (2.2.3), eine Kollineation derselben; ihre eindeutige projektive Fortsetzung ist entsprechend 2.2.2 ebenfalls Grenzwert der als Kollineationen von $\mathcal{P}^*$ aufgefaßten σ_ν. Rückdualisiert ist also die durch $\sigma(0) = 0$

auf $\mathbb{P}$ fortgesetzte Kollineation σ Grenzwert der Kollineationen σ_ν und da sie die Geraden durch 0 invariant läßt, ist sie eine Streckung . □

Während die vorstehenden Überlegungen für allgemeine topologische projektive Ebenen gültig bleiben, benötigt das folgende Korollar die Existenz einer Streckungsgruppe $G_{[0,L_\infty]}$ mit "von 0 bis L_∞ reichenden" Bahnen.
Der Einfachheit halber belassen wir unsere Formulierungen im Kontext kompakter Translationsebenen positiver Dimension:

2.2.6 Korollar.
Sei Ξ eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe Σ_0 der 0 festlasssenden stetigen (affinen) Kollineationen von $\mathbb{P}$; und Ξ enthalte die Zusammenhangskomponente der Streckungsgruppe $G_{[0,L_\infty]}$.
Dann induziert die natürliche Abbildung $\Phi : \Xi \longrightarrow \Xi|L_\infty$ einen Isomorphismus topologischer Gruppen

$$\widetilde{\Phi} : \Xi/\Xi_{[0,L_\infty]} \longrightarrow \Xi|L_\infty$$

(wobei links die Quotiententopologie betrachtet wird). Insbesondere ist $\Xi|L_\infty$ lokalkompakt.

Beweis: $\Xi_{[0,L_\infty]}$ ist gerade der Ineffektivitätskern von Ξ auf L_∞ und folglich ist mit Φ auch $\widetilde{\Phi}$ stetig und ein abstrakter Gruppenisomorphismus. Es genügt also der Nachweis der Stetigkeit von $\widetilde{\Phi}^{-1}$ im Neutralelement; und da die Topologie beider Gruppen abzählbare Basis hat, kann man mit Folgen argumentieren. Sei also eine Folge (ζ_κ) in Ξ vorgelegt, deren Bilder $\Phi(\zeta_\kappa)$ auf L_∞ gegen die Identität konvergieren. Nach Definition der Quotiententopologie auf $\Xi/\Xi_{[0,L_\infty]}$ hat man zu zeigen, daß zu jeder Teilfolge (ζ_μ) von (ζ_κ) eine Teilfolge (ζ_ν) von (ζ_μ) und Streckungen $\sigma_\nu \in \Xi_{[0,L_\infty]}$ existieren derart, daß die Folge $(\zeta_\nu \circ \sigma_\nu)$ gegen ein Element von $\Xi_{[0,L_\infty]}$ konvergiert.
Wenn man Ξ nach 2.1.3 als Untergruppe von $GL(2n,\mathbb{R})$ auffaßt, enthält nun Ξ nach Voraussetzung alle Streckungen mit positivem reellem Streckungsfaktor. Zu beliebigem festem $p \in \mathbb{A}$, $p \neq o$ lassen sich folglich Streckungen $\sigma_\mu \in \Xi_{[0,L_\infty]}$ finden derart, daß $\zeta_\mu \circ \sigma_\mu(p)$ für alle μ in einer festen kompakten, 0 nicht enthaltenden Teilmenge von $\mathbb{A}$ liegt. Für eine geeignete durch ν indizierte Teilfolge konvergiert dann $\zeta_\nu \circ \sigma_\nu(p)$ gegen einen von 0 verschiedenen Punkt q von $\mathbb{A}$. Nach 2.2.5 konvergiert folglich $\zeta_\nu \circ \sigma_\nu$ gegen eine Streckung, die wegen der

Abgeschlossenheit von Ξ in $\Xi_{[0,L_\infty]}$ liegt. □

2.2.7

Im weiteren interessieren wir uns hauptsächlich für die Zusammmehangskomponente Γ der (affinen) Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$. Nach 2.2.1 besteht sie aus stetigen Kollineationen und wirkt also als topologische Transformationsgruppe auf $\mathbb{A}$ und $\mathbb{P}$. Es ist

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot T = T \cdot \Gamma_0$$

(mit der Translationsgruppe T) und folglich ist auch Γ_0 zusammenhängend.
Nach 2.1.3 wirkt Γ_0 auf $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ als (natürlich abgeschlossene) Untergruppe von $GL(2n,\mathbb{R})$. Auch im Fall komplexen Kerns sind die Kollineationen von Γ_0 linear über dem Kern (semilinear nach 2.1.3, und die von Γ_0 auf $\mathbb{C}$ induzierte Gruppe stetiger Begleitautomorphismen ist zusammenhängend und besteht folglich nur aus der Identität). Im Fall reellen oder komplexen Kerns liegt folglich die Streckungsgruppe $\Gamma_{[0,L_\infty]} = G_{[0,L_\infty]} \cap \Gamma$ (die mindestens die Zusammenhangskomponente von $G_{[0,L_\infty]}$ enthält) im Zentrum von Γ_0 .

2.3 Über die Existenz großer kompakter Kollineationsgruppen .

In diesem Abschnitt wird die Standgruppe $\Gamma_{W,S}$ der Zusammenhangskomponente Γ der (affinen) Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$ auf zwei eigentlichen nichtparallelen Geraden W,S betrachtet und gezeigt, daß sie relativ große kompakte Untergruppen enthält.
Da in der Literatur über die Wirkung von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten in höheren Dimensionen häufig nur für kompakte Gruppen konkrete Resultate vorliegen, ist dieses Ergebnis von einiger Bedeutung für die Klassifikation höherdimensionaler kompakter Translationsebenen.

2.3.1

Koordinatisiert man wie in 2.1.1 die affine Ebene $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{2n}$ von $\mathcal{P}$ bezüglich zweier eigentlicher Geraden W und S als Koordinatenachsen über einem Quasikörper $Q = \mathbb{R}^n$, so besteht nach 2.2.7 $\Gamma_{W,S}$ aus linearen Abbildungen von $Q \times Q$ auf sich der Form

$$(B,C) : Q \times Q \longrightarrow Q \times Q : (x,y) \longmapsto (Bx, Cy)$$

$(B,C \in GL(n,\mathbb{R}))$. Führt die Kollineation (B,C) die Ursprungsgerade $V_m = \{(x,mx) \,/\, x \in Q\}$ der Steigung m in die Ursprungsgerade der

Steigung $\Phi_{(B,C)}(m)$ über, so gilt in Q

$$C(mx) = \Phi_{(B,C)}(m)\cdot B(x) \qquad . \qquad (3)$$

Vermöge $m \longmapsto V_m \wedge L_\infty$ (also mittels der Perspektivität der Geraden $\{(1,m) / m \in Q\}$ auf L_∞ vom Zentrum 0 aus) identifiziert man $L_\infty \setminus S \wedge L_\infty$ mit Q ; und durch $\infty \longmapsto S \wedge L_\infty$ läßt sich dies zu einer Identifikation der Einpunktkompaktifizierung $\hat{Q} = Q \cup \{\infty\}$ mit L_∞ fortsetzen.

Indem man noch $\Phi_{(B,C)}(\infty) = \infty$ setzt, beschreibt dann $\Phi_{(B,C)}$ die Wirkung der Kollineation $(B,C) \in \Gamma_{W,S}$ auf der uneigentlichen Geraden. Der Ineffektivitätskern der Wirkung von $\Gamma_{W,S}$ auf L_∞ ist gerade $\Gamma_{[0,L_\infty]}$. Die Homöomorphismengruppe $\Gamma_{W,S}|L_\infty$ ist unter der vorgenommenen Identifikation gleich der Homöomorphismengruppe $\Phi(\Gamma_{W,S}) = \{\Phi_{(B,C)} : \hat{Q} \longrightarrow \hat{Q} / (B,C) \in \Gamma_{W,S}\}$ von $\hat{Q}$ (mit der kompakt-offenen Topologie) und ist nach 2.2.6 lokalkompakt.

Nun das eigentliche Ergebnis dieses Paragraphen:

2.3.2 **Hauptsatz.**

(i) $\Gamma_{W,S}$ besitzt eine größte kompakte Untergruppe M und M ist ein Normalteiler von $\Gamma_{W,S}$. Ist ferner

$$R = \{(x,y) \longmapsto (xr,yr) / r \in \mathbb{R},\ r > 0\} \subseteq \Gamma_{[0,L_\infty]}$$

die Einparametergruppe der Streckungen mit reellem positivem Faktor und ist Y eine beliebige abgeschlossene Einparametergruppe von $\Gamma_{W,S}$ mit nicht kompaktem Bild $Y|L_\infty$, so ist

$$\Gamma_{W,S} = M\cdot R\cdot Y \quad ;$$

falls keine solche Einparametergruppe Y existiert, ist

$$\Gamma^1_{W,S} \subseteq M\cdot R \qquad .$$

(ii) Ist der Kern der Ebene $\mathbb{R}$, so ist M fast effektiv auf L_∞ .

Sei ferner Ξ eine abgeschlossene Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ mit $\Gamma_{[0,L_\infty]} \subseteq \Xi$.

(iii) Ist der Kern der Ebene $\mathbb{C}$, so existiert ein kompakter Normalteiler K von Ξ , der auf L_∞ fast effektiv ist und derart, daß

$$\Xi^1 \subseteq K\cdot\Gamma_{[0,L_\infty]} \text{ oder } \Xi = K\cdot\Gamma_{[0,L_\infty]}\cdot Y$$

(Y wie in (i) mit $Y \subseteq \Xi$). Ist Ξ zusammenhängend, so kann

auch K zusammenhängend gewählt werden.

(iv) Ist der Kern der Ebene H, und ist Ξ zusammenhängend, so existiert immerhin eine kompakte zusammenhängende auf L_∞ fast effektive Untergruppe K von Ξ so, daß entsprechend zu (iii)

$$\Xi = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} \quad \text{oder} \quad \Xi = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} \cdot Y \quad .$$

Zum Beweis dieses Satzes wird die folgende topologische Aussage herangezogen:

2.3.3 Lemma.

Sei X ein kompakter metrischer Raum; $\mathcal{C}(X,X)$ der Raum der stetigen Abbildungen von X in sich mit der kompakt-offenen Topologie. Dann ist eine (als Teilraum von $\mathcal{C}(X,X)$) lokalkompakte und auf X gleichgradig stetige Gruppe H von Homöomorphismen von X abgeschlossen in $\mathcal{C}(X,X)$.

Beweis: Zunächst ist H wegen der Kompaktheit von X ''gleichmäßig-gleichgradig'' stetig, d.h.

$$\bigwedge \varepsilon>0 \quad \bigvee \delta>0 \quad \bigwedge h\in H : \quad d(x_1,x_2) < \delta \implies d(h(x_1),h(x_2)) < \varepsilon \qquad (1)$$

Zu vorgelegtem ε existiert nämlich, wegen der gleichgradigen Stetigkeit von H, für jedes $x \in X$ eine Umgebung U_x von x mit $h(U_x) \subseteq K_{\varepsilon/2}(h(x))$ für alle $h \in H$. Sei δ eine Lebesgue - Zahl zur Überdeckung $\{U_x / x \in X\}$ von X. Für $d(x_1,x_2) < \delta$ gibt es ein $z \in X$ mit $x_1, x_2 \in U_z$ und für alle $h \in H$ ist dann $h(x_i) \in K_{\varepsilon/2}(h(z))$ $(i = 1,2)$, also $d(h(x_1),h(x_2)) < \varepsilon$. Dies zeigt (1).
Man wähle nun in (1) ε so, daß $U = \{h \in H / d(x,h(x)) < \varepsilon \ \bigwedge x \in X\}$ relativ kompakt in H ist. Für zugehöriges δ liegt jedes $f \in \overline{H}$ im Abschluß von $V = \{h \in H / d(f(x),h(x)) \leq \delta/2\}$; wegen (1) gilt dann für beliebiges $h \in V$ die Beziehung $h^{-1} \circ V \subseteq U$, $h^{-1} \circ f$ liegt also in $\overline{U} \subseteq H$ und folglich ist $f \in H$, was zu zeigen war. □

Beweis von Hauptsatz 2.3.2

Mit der in 1.1.4 eingeführten modularen Funktion Δ eines entsprechend 2.3.1 koordinatisierenden Quasikörpers $Q = \mathbb{R}^n$ folgt für eine Kollineation $(B,C) \in \Gamma_{W,S}$ aus der Beziehung

$$C(mx) = \Phi_{(B,C)}(m) \cdot B(x) \qquad (1$$

unmittelbar, daß für alle $m \in Q$

$$\Delta(\Phi_{(B,C)}(m)) = \det B^{-1} \cdot \det C \cdot \Delta(m) \quad . \tag{2}$$

Da wegen des Zusammenhangs von $Q \setminus \{0\}$ für alle $0 \neq m \in Q$ stets $\Delta(m) > 0$ ist, hat man dann jedenfalls

$$\det B^{-1} \cdot \det C > 0 \quad . \tag{3}$$

Zum Beweis der Existenz großer kompakter Untergruppen wird wieder der Satz von Arzela-Ascoli herangezogen werden; wir beweisen hierzu

a) Der Normalteiler

$$H = \left\{\Phi_{(B,C)} \;/\; (B,C) \in \Gamma_{W,S} \;;\; \Delta(\Phi_{(B,C)}(m)) = \Delta(m) \;\wedge\; m \in Q\right\}$$
$$= \left\{\Phi_{(B,C)} \;/\; (B,C) \in \Gamma_{W,S} \;;\; \det B = \det C\right\}$$

von $\Phi(\Gamma_{W,S}) = \Gamma_{W,S}|L_\infty$ ist gleichgradig stetig auf $L_\infty \setminus S_\infty L_\infty = Q$ bezüglich irgendeiner Metrik.

Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein $m \in Q$, eine gegen $0 \in Q$ konvergente Folge $m_\nu \in Q$ und eine Folge (B_ν, C_ν) von Kollineationen aus $\Gamma_{W,S}$ mit $P_\nu = \Phi_{(B_\nu,C_\nu)} \in H$ und

$$d(P_\nu(m + m_\nu), P_\nu(m)) > \varepsilon \tag{4}$$

für geeignetes von ν unabhängiges $\varepsilon > 0$.
Man beachte nun, daß nach Definition von H das Quasikörperelement $P_\nu(m)$ in der nach 1.1.4 kompakten Teilmenge $\{a \in Q \;/\; \Delta(a) \leq \Delta(m)\}$ von Q enthalten ist. Durch geeignete Wahl von $x_\nu \in \langle 1 \rangle \subseteq \operatorname{Ker} Q$ und Auswahl von Teilfolgen kann man o.B.d.A. annehmen, daß $B_\nu(x_\nu)$ und $P_\nu(m)$ in Q konvergieren und

$$\lim_{\nu\to\infty} B_\nu(x_\nu) = x \neq 0 \;;\; \lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m) = a \quad . \tag{5}$$

Wegen $x_\nu \in \operatorname{Ker} Q$ folgt nun aus (1)

$$\begin{aligned} P_\nu(m + m_\nu) \cdot B_\nu(x_\nu) &= C_\nu((m + m_\nu)x_\nu) = C_\nu(mx_\nu + m_\nu x_\nu) = \\ &= C_\nu(mx_\nu) + C_\nu(m_\nu x_\nu) \\ &= P_\nu(m) \cdot B_\nu(x_\nu) + P_\nu(m_\nu) \cdot B_\nu(x_\nu) \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen $P_\nu \in H$, also $\Delta(P_\nu(m_\nu)) = \Delta(m_\nu)$ und da m_ν gegen 0 konvergiert, konvergiert $P_\nu(m_\nu)$ nach 1.1.4 ebenfalls gegen C. Die rechte Seite von (6) konvergiert also wegen (5), folglich auch die linke und im Grenzwert ergibt sich $\lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m + m_\nu) \cdot x = ax$, also $\lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m + m_\nu) = a = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu(m)$, was im Widerspruch zu (4) steht. H ist also gleichgradig stetig wie behauptet.-

Damit ergibt sich nun

b) H ist ein kompakter Normalteiler von $\Gamma_{W,S}|L_\infty$.

Zunächst ist nämlich H gleichgradig stetig auch auf dem kompakten Raum $L_\infty = \hat{Q} = Q \cup \{\infty\}$ bezüglich irgendeiner Metrik: Nach Definition und 1.1.4 läßt H "beliebig große" Nullumgebungen in Q , also auch beliebig kleine kompakte Umgebungen von ∞ in $\hat{Q}$ invariant und ist also gleichgradig stetig in ∞ . In $y \in Q$ folgt die gleichgradige Stetigkeit von H bezüglich Q aus der eben bezüglich Q und einer beliebigen Metrik bewiesenen.
Ferner ist H nach Definition abgeschlossen in $\Phi(\Gamma_{W,S}) = \Gamma_{W,S}|L_\infty$ und folglich nach 2.2.6 lokalkompakt; mit der gleichgradigen Stetigkeit von H ergibt sich dann aus 2.3.3 die Abgeschlossenheit von H sogar in $\mathcal{C}(Q,Q)$. Da die Bahnen unter H relativ kompakt sind (für $y \in Q$ ist $H(y)$ nach Definition in der nach 1.1.4 kompakten Teilmenge $\{a \in Q \,/\, \Delta(a) \leq \Delta(y)\}$ von Q enthalten) folgt insgesamt nach dem Satz von Arzela-Ascoli (DUGUNDJI XII 6.4) die Kompaktheit von H .

c) Wir fassen (vgl. 2.2.7) die Elemente von $\Gamma_{W,S}$ als lineare Abbildungen über $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle \subseteq \operatorname{Ker} Q$ auf. Man erhält dann einen abgeschlossenen Normalteiler $S\Gamma_{W,S}$ von $\Gamma_{W,S}$ als die Untergruppe der linearen Abbildungen von Determinante 1.
Da nach (3) alle Elemente von $\Gamma_{W,S}$ positive Determinante haben, kann jede Kollineation aus $\Gamma_{W,S}$ durch eine Streckung mit $r > \mathbb{R}$, $r > 0$, also durch eine Kollineation aus der Einparametergruppe R , zu einer Kollineation aus $S\Gamma_{W,S}$ abgeändert werden . $\Gamma_{W,S}$ ist also direktes Produkt von $S\Gamma_{W,S}$ und R ; und andererseits ist $\Phi(\Gamma_{W,S}) = \Phi(S\Gamma_{W,S})$.-

Im Fall $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{R}$ ist ferner $S\Gamma_{[0,L_\infty]} = \{1\}$ oder $\{1,-1\}$; im Fall $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{C}$ ist $S\Gamma_{[0,L_\infty]}$ die Gruppe $SO(2)$ der komplexen Zahlen von Norm 1; im Fall $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{H}$ die Gruppe $Spin(3)$ der Quaternionen von Norm 1 . $S\Gamma_{[0,L_\infty]}$ ist jedenfalls kompakt und ist gerade der Ineffektivitätskern auf L_∞ des abgeschlossenen Normalteilers

$$M = \Phi^{-1}(H) \cap S\Gamma_{W,S}$$

von $\Gamma_{W,S}$. Der Quotient $\Phi(M) = H$ von M nach $S\Gamma_{[0,L_\infty]}$ ist nach b) kompakt und folglich ist M kompakt. Im Fall von $\operatorname{Ker} Q = \mathbb{R}$ ist M fast effektiv auf L_∞ .

d) M ist die größte kompakte Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$.

Die Determinante über $\mathbb{R}$ ist nämlich ein stetiger Homomorphismus von $\Gamma_{W,S}$ in $\mathbb{R}^\circ$, ebenso die nach (2) von $0 \neq m \in Q$ unabhängige Abbildung

$$\psi : \Gamma_{W,S} \longrightarrow \mathbb{R}^\circ : (B,C) \longmapsto \frac{\Delta(\Phi_{(B,C)}(m))}{\Delta(m)} = \det B^{-1} \cdot \det C \ .$$

Da $\mathbb{R}^\circ$ keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, liegt folglich jede kompakte Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ in $S\Gamma_{W,S}$ und in $\psi^{-1}(1) = \Phi^{-1}(H)$.-

Da ψ über $\Gamma_{W,S}/\Gamma_{[0,L_\infty]}$ faktorisiert, ist darüberhinaus sogar jede Untergruppe X von $\Gamma_{W,S}$ mit kompaktem Bild $X|L_\infty$ in $\Phi^{-1}(H)$ enthalten.

e) Haben alle abgeschlossenen Einparameteruntergruppen Y von $\Gamma_{W,S}$ kompaktes Bild $Y|L_\infty$, so liegt folglich die von ihnen erzeugte Zusammenhangskomponente $\Gamma^1_{W,S}$ von $\Gamma_{W,S}$ in

$$\Phi^{-1}(H) = (\Phi^{-1}(H) \cap S\Gamma_{W,S}) \cdot R = M \cdot R \ .$$

Ist andererseits Y eine abgeschlossene Einparametergruppe von $\Gamma_{W,S}$ mit nicht kompaktem Bild $Y|L_\infty$, so ist dasselbe nicht in der kompakten Gruppe H enthalten, d.h. der Homomorphismus ψ nimmt auf Y nicht nur 1 als Wert an; und da $\mathbb{R}^\circ$ keine echten zusammenhängenden Untergruppen besitzt, ist $\psi|Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}^\circ$ ein Isomorphismus topologischer Gruppen, dessen Inverses wir $\eta : \mathbb{R}^\circ \longrightarrow Y$ notieren. Für beliebiges $\gamma \in \Gamma_{W,S}$ ist $\psi(\gamma \cdot \eta(\psi(\gamma)^{-1})) = 1$ und folglich $\gamma \cdot \eta(\psi(\gamma)^{-1}) \in \Phi^{-1}(H)$; also $\Gamma_{W,S} = \Phi^{-1}(H) \cdot Y = M \cdot R \cdot Y$.

Damit sind (i) und (ii) der Behauptung bewiesen.-

Sei nun Ξ eine Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ wie in der Formulierung des Satzes.

f) Ist der Kern der Ebene C , so betrachten wir die Elemente von $\Gamma_{W,S}$ als linear über $\mathrm{Ker}\, Q = C$ (2.2.7) und verwenden ihre komplexe Determinante $\det_C$ bezüglich dieser linearen Struktur . Sei

$$K = \{\sigma \in M \cap \Xi \ / \ \det_C \sigma = 1\} \ .$$

Da M kompakt ist, haben alle Elemente von M komplexe Determinante vom Betrag 1 . $T = (M \cap \Xi) \cap \Gamma_{[0,L_\infty]}$ besteht gerade aus den Streckungen mit komplexen Zahlen vom Betrag 1 ; infolgedessen

hat zum einen K endlichen Schnitt mit $\Gamma_{[0,L_\infty]}$ (d.h. K ist fast effektiv auf L_∞); zum andern ist $M \cap \Xi = K \cdot T$ und $T \cdot R = \Gamma_{[0,L_\infty]}$. Enthält Ξ eine abgeschlossene Einparametergruppe Y mit nicht kompaktem Bild $Y|L_\infty$, so ist nach (i) $\Xi = (M \cap \Xi) \cdot R \cdot Y = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} \cdot Y$; andernfalls ist wieder $\Xi^1 \subseteq (M \cap \Xi) \cdot R = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]}$. Ist Ξ zusammenhängend, so hat - einfach aus Dimensionsgründen - die Zusammenhangskomponente von K statt K ebenfalls die behaupteten Eigenschaften.

g) Es bleibt der Fall zu H isomorphen Kerns für zusammenhängendes Ξ zu behandeln. Nach (i) ist $M \cap \Xi$ die größte kompakte Untergruppe von Ξ und ist daher ebenfalls zusammenhängend. Der Ineffektivitätskern $N = (M \cap \Xi) \cap \Gamma_{[0,L_\infty]}$ von $M \cap \Xi$ auf L_∞ ist die Gruppe Spin(3) der Quaternionen von Norm 1. Nach HOFMANN II 12.17 existiert eine kompakte Untergruppe Λ von $M \cap \Xi$ mit $\Lambda \cdot N = M \cap \Xi$ und endlichem Schnitt $\Lambda \cap N = \Lambda \cap \Gamma_{[0,L_\infty]}$. Λ ist also fast effektiv auf L_∞, d.h. überlagert $\Lambda|L_\infty = \Phi(\Lambda) = \Phi(\Lambda \cdot N) = \Phi(M \cap \Xi)$ endlich. Ist K die Zusammenhangskomponente von Λ, so ist wegen des Zusammenhangs von $M \cap \Xi$ dann $\Phi(K) = \Phi(\Lambda)$, folglich $K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} = \Lambda \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} = \Lambda \cdot N \cdot R = (M \cap \Xi) \cdot R$ und daher nach (i) $\Xi = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]}$ oder $\Xi = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} \cdot Y$. Dies beweist schließlich die Behauptung (iv).- □

Die Nützlichkeit des eben bewiesenen Satzes für die Klassifikation kompakter Translationsebenen nach ihrer Kollineationsgruppe soll in dieser Arbeit am Beispiel achtdimensionaler kompakter projektiver Ebenen vom Lenz-Typ V demonstriert werden.

§ 3 Achtdimensionale kompakte projektive Ebenen vom Lenz - Typ V

In diesem Paragraphen sollen die 8-dimensionalen kompakten projektiven Ebenen vom Lenz-Typ V mit großer Kollineationsgruppe klassifiziert werden.

3.1 Grundsätzliches zum Lenz-Typ V

3.1.1

Ohne auf Feinheiten der Lenz-Barlotti-Klassifikation (vgl. DEMBOWSKI 3.2.1o) einzugehen, verstehen wir mit PICKERT 3.1.14 unter einer projektiven Ebene vom Lenz-Typ V eine Translationsebene mit Translationsachse L_∞, deren Kollineationsgruppe zudem für einen Punkt $s \in L_\infty$ und für alle Geraden L durch diesen Punkt (s,L) - transitiv ist.
Dies bedeutet genau, daß die duale Ebene ebenfalls eine Translationsebene mit s als Translationsachse ist. Der Punkt s werde daher als Translationszentrum bezeichnet.
Nach ANDRÉ Satz 4 sind die projektiven Ebenen vom Lenz-Typ V gerade diejenigen, die bezüglich zweier eigentlicher Geraden W,S mit $s \in S$ als Koordinatenachsen und einem Einheitspunkt $e \notin W \cup S \cup L_\infty$ durch einen **distributiven** Quasikörper koordinatisiert werden. Existiert außer s noch ein weiteres Translationszentrum, so sind (wegen der Transitivität der Kollineationsgruppe auf $L_\infty \setminus \{s\}$) alle Punkte von L_∞ Translationszentren; dies ist genau dann der Fall, wenn die in der beschriebenen Weise koordinatisierenden Quasikörper sogar Alternativkörper sind.-

3.1.2

Eine kompakte topologische projektive Ebene positiver Dimension vom Lenz-Typ V wird also in der beschriebenen Weise durch eine endlichdimensionale reelle Divisionsalgebra mit Einselement koordinatisiert (1.3.2). Da jede 1- oder 2-dimensionale Divisionsalgebra dieser Art isomorph zu $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist (1.1.2; 1.3.3) und da jeder lokalkompakte Alternativkörper positiver Dimension isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ ist (SALZMANN (1967) 7.27), kommen außer den klassischen Ebenen für solche Ebenen nur 8- oder 16-dimensionale Ebenen mit eindeutig bestimmtem Translationszentrum s in Frage.

Im folgenden sei daher $\mathcal{P}$ eine nicht klassische kompakte projektive 8- oder 16- dimensionale Ebene vom Lenz-Typ V . Wir vergegenwärtigen uns $\mathcal{P}$ meist als affine Ebene $\mathcal{A}$ (mit L_∞ als uneigentlicher Geraden), die wir uns in der beschriebenen Weise über einer reellen Divisionsalgebra $D = \mathbb{R}^n$ $(n = 4,8)$ koordinatisiert denken.

Aus dem bereits gesagten (zusammen mit 2.1.2) ergibt sich sofort

3.1.3

Die Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$ läßt im nichtklassischen Fall die Translationsachse L_∞ und das Translationszentrum $s \in L_\infty$ fest.

In Verschärfung der Verhältnisse bei allgemeinen Translationsebenen (2.1.3) gilt im Fall von Lenz-Typ V :

3.1.4

Jede Kollineation von $\mathcal{P}$ ist stetig.

allgemeiner noch:

3.1.5

a) Ein Isomorphismus zweier kompakter Ebenen $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ positiver Dimension vom Lenz-Typ V ist stetig.

b) Sind $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ über Divisionsalgebren D_1 und D_2 koordinatisiert, so sind $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ genau dann isomorph, wenn D_1 und D_2 linear isotop sind (vgl. 1.3.4).

Beweis: a) Ein Isomorphismus kann in Koordinaten beschrieben werden durch einen Isomorphismus zweier geeignet gewählter koordinatisierender Divisionsalgebren, der seinerseits nach 1.3.3 linear über den zu $\mathbb{R}$ isomorphen Zentren der Divisionsalgebren und folglich stetig ist.
b) Jeder Isomorphismus von $\mathcal{P}_1$ auf $\mathcal{P}_2$ führt in kanonischer Weise zu einem additiven Isotopismus von D_1 auf D_2 (vgl. etwa HUGHES - PIPER Theorem 8.11); und die nach a) stets gegebene Stetigkeit des Isomorphismus schlägt sich dabei in der Stetigkeit der in den Isotopismus eingehenden additiven Abbildungen nieder, die folglich sogar linear sind. □

Im speziellen Fall bestimmter Kollineationen läßt sich die vorstehende etwas summarische Argumentation leicht im einzelnen verfolgen:

3.1.6

Die Kollineationen von $\mathcal{P}$, die die Koordinatenachsen S und W festhalten, entsprechen bezüglich der koordinatisierenden Divisionsalgebra D genau den linearen Autotopismen $(\Phi_{(B,C)},B,C)$ von D, wobei

$$(B,C) : D\times D \longrightarrow D\times D : (x,y) \longmapsto (Bx,Cy)$$

die Kollineation in Koordinaten beschreibt und $\Phi_{(B,C)} : D \longrightarrow D$ wie in 2.3.1 die Wirkung der Kollineation (B,C) auf der uneigentlichen Geraden wiedergibt.

Bemerkung: Was gegenüber den in 2.3.1 für allgemeine Translationsebenen geschilderten Verhältnissen an zusätzlichen Informationen vorliegt, ist dabei die Linearität der Abbildung $\Phi_{(B,C)}$, also der Wirkung auf der uneigentlichen Geraden (wenn man diese wie schon bisher mit $\hat{D} = D\cup\{\infty\}$ identifiziert). Dies macht Ebenen vom Lenz-Typ V im Hinblick auf ihre Kollineationsgruppe elementar zugänglich, wie wir im weiteren sehen werden.

Beweis: Aus der Stetigkeit der Kollineationen folgt nach 2.1.3 die Linearität von B und C. Wie in 2.3.1 gilt $C(mx) = \Phi_{(B,C)}(m)\cdot B(x)$ für alle $m,x \in D$ und für $x = 1$ folgt $\Phi_{(B,C)}(m_1 + m_2)\cdot B(1) = C(m_1 + m_2) = C(m_1) + C(m_2) = \Phi_{(B,C)}(m_1)\cdot B(1) + \Phi_{(B,C)}(m_2)\cdot B(1) = (\Phi_{(B,C)}(m_1) + \Phi_{(B,C)}(m_2))\cdot B(1)$ und Kürzen von B(1) zeigt, daß $\Phi_{(B,C)} : D \longrightarrow D$ additiv und folglich, da stetig, linear ist. □

3.1.7

Sei wieder wie in §2 Γ die Zusammenhangskomponente der Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$ mit der kompakt-offenen Topologie.
Die (nach 2.2.7 zusammenhängende) Standgruppe Γ_0 von $0 = S\wedge W$ läßt nach 3.1.3 die Ursprungsgerade S durch das Translationszentrum s fest.
Der auf $L\setminus\{s\}$ transitive Normalteiler $\Gamma_{[s,S]}$ von Γ_0 aller Scherungen mit Zentrum s und Achse S besteht in Koordinaten über D bekanntlich gerade aus den Abbildungen

$$(x,y) \longmapsto (x,kx + y) \qquad (k \in D)$$

(vgl. z.B. SALZMANN - LÖWEN 14.2.11) und ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$. Man hat

$$\Gamma_0 = \Gamma_{[s,S]}\cdot\Gamma_{W,S}$$

und folglich ist auch $\Gamma_{W,S}$ zusammenhängend.

Die Kollineationen in $\Gamma_{W,S}$ mit Achse S (und folglich Zentrum $w = W \wedge L_\infty$) bzw. mit Achse W (und folglich Zentrum s) erfaßt man üblicherweise algebraisch über die koordinatisierende Divisionsalgebra mit Hilfe der folgenden Begriffe:

3.1.8

Der Linksnukleus bzw. Mittelnukleus der Divisionsalgebra $D = \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$N_\lambda(D) = \{a \in D \,/\, a(xy) = (ax)y \quad \wedge x,y \in D\}$$

bzw.

$$N_\mu(D) = \{a \in D \,/\, x(ay) = (xa)y \quad \wedge x,y \in D\} \quad .$$

$N_\lambda(D)$ und $N_\mu(D)$ sind abgeschlossene Unterkörper von D, die das zu $\mathbb{R}$ isomorphe Zentrum $\langle 1 \rangle$ von D enthalten und sind folglich isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (falls D 4-dimensional) bzw. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ (falls D 8-dimensional), sofern D nicht selbst ein Körper ist.-

Etwa nach SALZMANN - LÖWEN 14.2.4 und 14.2.5 erhält man dann die Gruppen $G_{[s,W]}$ bzw. $G_{[w,S]}$ der Kollineationen von $\mathcal{P}$ mit Zentrum s und Achse W bzw. Zentrum w und Achse S als

$$G_{[s,W]} = \{(x,y) \longmapsto (x,ay) \;/\; a \in N_\lambda(D) \setminus \{0\}\}$$

$$G_{[w,S]} = \{(x,y) \longmapsto (ax,y) \;/\; a \in N_\mu(D) \setminus \{0\}\} \;;$$

diese Gruppen sind also isomorph zu $\mathbb{R}^\times$, $\mathbb{C}^\times$ oder $\mathbb{H}^\times$.
Da Γ die Zusammenhangskomponente der Kollineationsgruppe von $\mathcal{P}$ ist, gilt für die Ineffektivitätskerne $\Gamma_{[s,W]}$ bzw. $\Gamma_{[w,S]}$ von $\Gamma_{W,S}$ auf den Fixgeraden W bzw. S

$$G^1_{[s,W]} \subseteq \Gamma_{[s,W]} \subseteq G_{[s,W]}$$

und

$$G^1_{[w,S]} \subseteq \Gamma_{[w,S]} \subseteq G_{[w,S]} \quad .$$

Da die maximale kompakte Untergruppe der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{H}$) Dimension 1 (bzw. Dimension 3) hat, kann im Fall $\dim \mathcal{P} = 8$ (bzw. $\dim \mathcal{P} = 16$) insbesondere keine kompakte Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ der Dimension > 1 (bzw. > 3) ineffektiv auf W oder S wirken - sofern nicht $\mathcal{P}$ desarguesch ist.
Da das Zentrum $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ von D in beiden Nuklei liegt, enthält $\Gamma_{W,S}$ stets die beiden zu $\mathbb{R}^\circ$ isomorphen Streckungsgruppen

$$X = \{(x,y) \longmapsto (rx,y) \;/\; r \in \mathbb{R},\; r > 0\}$$

(Streckungen in W - Richtung) und

$$Y = \{(x,y) \longmapsto (x,ry) \;/\; r \in \mathbb{R},\ r > 0\}$$

(Streckungen in S - Richtung).

Mit den Translationen, Scherungen und diesen Streckungen kennt man damit bereits eine 14-dimensionale Kollineationsgruppe (für dim $\mathcal{P} = 8$) bzw. 26-dimensionale Kollineationsgruppe (für dim $\mathcal{P} = 16$).-

Wenn wir in der Folge nach 2.3.1 $L_\infty \setminus \{s\}$ mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren und nach 3.1.6 $\Phi(\Gamma_{W,S}) = \Gamma_{W,S}|L_\infty$ als Untergruppe der generellen linearen Gruppe dieses Vektorraums auffassen, so wirkt die Streckungsgruppe Y auf $L_\infty \setminus \{s\}$ gerade wie die reellen positiven Streckungen im üblichen Sinn.

Nach 2.3.2 existiert also eine kompakte zusammenhängende auf L_∞ fast effektive Untergruppe K von $\Gamma_{W,S}$ mit

$$\Gamma_{W,S} = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} \cdot Y \quad ;$$

und nach dem bisher Gesagten ist die Struktur von Γ durch K und den Kern der Ebene bestimmt.

In der Folge sollen nun daher für die Fälle, in denen Γ hohe Dimension hat, die für 8-dimensionale Ebenen (also $n = 4$) in Frage kommenden Untergruppen K analysiert werden. Da K kompakt zusammenhängend ist und linear auf $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{R}^4$ wirkt, ist $K|L_\infty$ (bis auf Konjugation) eine Untergruppe von $SO(4) = SO(4,\mathbb{R})$; es seien deshalb zunächst die benötigten Informationen über die Struktur von $SO(4)$ zusammengestellt.

3.2 Zur Struktur von $SO(4)$ und ihrer universellen Überlagerung

Der Inhalt dieses Abschnitts ist natürlich Folklore, die hier nur zur größeren Bequemlichkeit zusammengestellt wird.

Multiplikation bedeute hier stets die Multiplikation in den Quaternionen $\mathbb{H}$, die wir (als Vektorraum entlang der üblichen Basis $\{1,i,j,k\}$) mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren.

3.2.1

Seien $\quad Spin(3) = \{a \in \mathbb{H} \;/\; |a| = 1\}$

und $\quad T = \{z \in \langle 1,i\rangle \;/\; |z| = 1\} \cong SO(2)$.

Dann ist bekanntlich

$$\pi : Spin(3) \times Spin(3) \longrightarrow SO(4) \quad : (a,b) \longmapsto (x \longmapsto axb^{-1})$$

$(x \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H})$ eine zweifache Überlagerung topologischer Gruppen, deren Einschränkung

$$\pi : \mathrm{Spin}(3)\times\mathbb{T} \longrightarrow U(2,\mathbb{C}) : (a,z) \longmapsto (x \longmapsto axz^{-1})$$

eine Überlagerung von $U(2) = U(2,\mathbb{C})$ ist und deren Einschränkung auf die Diagonale zu einer zweifachen Überlagerung

$$\pi : \mathrm{Spin}(3) \longrightarrow SO(3) : a \longmapsto (x \longmapsto axa^{-1})$$

führt (wobei wir $SO(3)$ mit der natürlichen Wirkung auf $\langle i,j,k\rangle$ als Untergruppe von $SO(4)$ betrachten). $SO(4)$ besitzt die beiden zu $\mathrm{Spin}(3)$ isomorphen Normalteiler

$$LO(4) = \{(x \longmapsto ax) \;/\; a \in \mathrm{Spin}(3)\} = \pi(\mathrm{Spin}(3)\times\{1\})$$

und

$$RO(4) = \{(x \longmapsto xb^{-1}) \;/\; b \in \mathrm{Spin}(3)\} = \pi(\{1\}\times\mathrm{Spin}(3)) ;$$

diese sind konjugiert in $O(4)$ (nämlich konjugiert unter $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} : x \longmapsto \bar{x}$).-

Etwa aus BETTEN (1973d) S. 40 ff. entnimmt man die folgenden Aussagen:

3.2.2

Die echten zusammenhängenden abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{Spin}(3)$ und $SO(3)$ sind genau die eindimensionalen Torusuntergruppen; bei $\mathrm{Spin}(3)$ ergeben sich diese gerade als die Schnitte mit einem zweidimensionalen 1 enthaltenden Teilraum von $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. Die natürliche transitive Wirkung von $\mathrm{Spin}(3)$ (effektiv als $SO(3)$) auf der 2-Sphäre hat genau alle diese Gruppen als Standgruppen; sie sind daher paarweise konjugiert.

3.2.3

$\mathrm{Spin}(3)$ und $SO(3)$ haben nur innere Automorphismen.

3.2.4

$SO(3)$ ist einfach und $\mathrm{Spin}(3)$ besitzt $\{1,-1\}$ als einzigen nichttrivialen Normalteiler.-

Damit ergibt sich nun

3.2.5

$\mathrm{Spin}(3)\times\mathrm{Spin}(3)$ bzw. $SO(4)$ besitzt genau die folgenden zusammenhängenden abgeschlossenen echten Untergruppen:

(a) **Ein- und zweidimensionale Torusgruppen**

(b) **Die Normalteiler $\mathrm{Spin}(3)\times\{1\}$ und $\{1\}\times\mathrm{Spin}(3)$** (bzw. $LO(4)$ und

$RO(4)$)

(c) Die zur Diagonalen von $Spin(3)\times Spin(3)$ (bzw. zu $SO(3)\subseteq SO(4)$) konjugierten dreidimensionalen (nicht normalen) Untergruppen.

(d) Die vierdimensionalen Untergruppen $Spin(3)\times T$ und $T\times Spin(3)$, wo T eine eindimensionale Torusuntergruppe von $Spin(3)$ ist - (bzw. deren Bilder in $SO(4)$ unter der Überlagerung π, die in $O(4)$ alle konjugiert zu $U(2)\subseteq SO(4)$ sind).

Beweis: Die einzige zusammenhängende nicht kommutative zweidimensionale Liegruppe L_2 ist nicht kompakt; folglich gibt (a) die gesuchten Untergruppen der Dimension ≤ 2.

Für die weiteren Aussagen genügt die Betrachtung der Überlagerung $Spin(3)\times Spin(3)$; sei π_i $(i = 1,2)$ die Projektion auf den i-ten Faktor und K eine echte abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe der Dimension ≥ 3 von $Spin(3)\times Spin(3)$.

Eine der Projektionen von K auf die Faktoren $Spin(3)$ muß surjektiv sein (sonst wäre K nach 3.2.2 in einer zweidimensionalen Torusuntergruppe enthalten und also selbst höchstens zweidimensional). Bis auf Vertauschung der Faktoren ist also $\pi_1(K) = Spin(3)$. Der Normalteiler

$$N = \pi_2^{-1}(1)\cap K$$

von K ist in $Spin(3)\times\{1\}$ enthalten; $\pi_1(N)$ ist Normalteiler von $Spin(3)$ und folglich (3.2.4) endlich oder ganz $Spin(3)$.

Ist $\pi_1(N)$ endlich, so auch N (da $N = \pi_1(N)\times\{1\}$); K überlagert dann (mittels π_2) eine Untergruppe von $Spin(3)$ und da einerseits K mindestens dreidimensional ist, andererseits die einfach zusammenhängende Gruppe $Spin(3)$ nicht echt überlagert werden kann, ist $\pi_2 : K \longrightarrow Spin(3)$ ein Isomorphismus. Folglich ist $K = \{(a,\varphi(a)) \;/\; a \in Spin(3)\}$, wo φ ein Automorphismus von $Spin(3)$ ist und nach 3.2.3 also konjugiert zur Diagonalen in $Spin(3)\times Spin(3)$.

Ist jedoch $\pi_1(N) = Spin(3)$, so ist $N = Spin(3)\times\{1\} \subseteq K$ und folglich $K = Spin(3)\times\pi_2(K)$. Nach 3.2.2 ergeben sich somit (da wir Faktorenvertauschung berücksichtigen müssen) für K die Untergruppen $Spin(3)\times\{1\}$, $\{1\}\times Spin(3)$ oder aber $Spin(3)\times T$, $T\times Spin(3)$ mit einer eindimensionalen Torusuntergruppe T von $Spin(3)$; die letzten beiden Gruppen sind dabei in $Spin(3)\times Spin(3)$ zu $Spin(3)\times T$ bzw. $T\times Spin(3)$ konjugiert. $Spin(3)\times T$ überlagert $U(2)\subseteq SO(4)$; $T\times Spin(3)$ überlagert die Untergruppe $\{(x\longmapsto zxa^{-1}) \;/\; z\in T,\ a\in Spin(3)\}$

von $SO(4)$, die durch Konjugation mit $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} : x \longmapsto \bar{x}$ (also mit einem Element von $O(4) \setminus SO(4)$) in $U(2)$ übergeht. □

3.2.6

Die einzigen echten zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler von $Spin(3) \times \mathbb{T}$ sind $Spin(3) \times \{1\}$ und $\{1\} \times \mathbb{T}$.
Die einzigen echten zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler von $U(2)$ sind folglich $\{x \longmapsto ax \;/\; a \in Spin(3)\} = LO(4)$ und $\{(x \longmapsto xz \;/\; z \in \mathbb{T}\}$.-

Beweis: Ein solcher Normalteiler von $Spin(3) \times \mathbb{T}$ kann als Untergruppe von $Spin(3) \times Spin(3)$ aufgefasst werden und ist folglich nach 3.2.5 entweder gleich $Spin(3) \times \{1\}$ oder er ist abelsch und liegt dann (HOFMANN I 2.17) in der Zusammenhangskomponente $\{1\} \times \mathbb{T}$ des Zentrums von $Spin(3) \times \mathbb{T}$.- □

3.2.7

Sei $\varphi : Spin(3) \longrightarrow GL(4,\mathbb{R})$ ein nichttrivialer Homomorphismus mit nichttrivialem Kern.
Dann existiert ein innerer Automorphismus γ von $GL(4,\mathbb{R})$ so, daß

$$\gamma \circ \varphi = \pi : Spin(3) \longrightarrow SO(3) \subseteq GL(4,\mathbb{R}) : a \longmapsto (x \longmapsto axa^{-1}) \quad .$$

Beweis: Bis auf inneren Automorphismus von $GL(4,\mathbb{R})$ liegt $\varphi(Spin(3))$ in $SO(4)$ und nach 3.2.5 können wir sogar annehmen, daß $\varphi(Spin(3)) = SO(3) \subseteq SO(4)$. φ und π sind dann universelle Überlagerungen von $SO(3)$; folglich existiert ein (nach 3.2.3 innerer) Automorphismus $\eta : Spin(3) \longrightarrow Spin(3) : a \longmapsto bab^{-1}$ $(b \in Spin(3)$ fest) mit $\varphi \circ \eta = \pi$. Für alle $x \in \mathbb{R}^4$ gilt dann

$$axa^{-1} = \varphi(bab^{-1})(x) = (\varphi(b) \circ \varphi(a) \circ \varphi(b)^{-1})(x)$$

und der von $\varphi(b)$ induzierte innere Automorphismus γ von $GL(4,\mathbb{R})$ ist der gesuchte. □

3.2.8

$Spin(3) \times \mathbb{T}$ oder $Spin(3) \times Spin(3)$ wirke als topologische Transformationsgruppe linear und fast effektiv auf $\mathbb{R}^4$. Dann wirkt der Normalteiler $Spin(3) \times \{1\}$ linear konjugiert zu $LO(4)$ und folglich effektiv.

Beweis: Sei $\varphi : Spin(3) \times \mathbb{T} \longrightarrow GL(4,\mathbb{R})$ der die Wirkung beschreibende stetige Homomorphismus mit endlichem Kern. $\varphi(Spin(3) \times \mathbb{T})$ ist bis auf Konjugation in $GL(4,\mathbb{R})$ eine vierdimensionale zusammenhängende kompakte Untergruppe von $SO(4)$ und folglich o.B.d.A. gleich $U(2)$ (3.2.5) . Der dreidimensionale Normalteiler $Spin(3) \times \{1\}$ geht unter dem dimensionstreuen Homomorphismus φ dann nach 3.2.6 in den Normalteiler $LO(4)$ von $U(2)$ über; die Einschränkung von φ auf $Spin(3) \times \{1\}$ vermittelt also eine Überlagerung $Spin(3) \times \{1\} \longrightarrow LO(4) = Spin(3)$ und ist daher ein Isomorphismus.- Die entsprechende Aussage für $Spin(3) \times Spin(3)$ ergibt sich dann sofort durch Einschränkung auf die Untergruppe $Spin(3) \times \mathbb{T}$.- □

3.3 Spin(3) als Kollineationsgruppe achtdimensionaler Ebenen vom Lenz-Typ V

In Vorbereitung unseres Klassifikationsvorhabens sollen in diesem Abschnitt einige immer wieder auftretende spezielle Situationen für kompakte Untergruppen der Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ studiert werden.

Multiplikation versteht sich wieder in den Quaternionen.

3.3.1 Lemma.

In einer achtdimensionalen kompakten projektiven Ebene $\mathcal{P}$ vom Lenz-Typ V wirke eine kompakte zusammenhängende Untergruppe K von $\Gamma_{W,S}$ fast effektiv auf L_∞ als $Spin(3)$.
Dann ist K isomorph zu $Spin(3)$ und kann nicht sowohl auf W als auch auf S effektiv wirken. Ist $\mathcal{P}$ nicht desarguesch, so stellt sich folglich K auf der affinen Ebene $W \times S$ (bei geeigneter Identifikation der affinen Geraden W und S mit $\mathbb{H}$) als die Gruppe

$$K = \{(x,y) \longmapsto (ax, aya^{-1}) \;/\; a \in Spin(3)\} \qquad (1)$$

oder die Gruppe

$$K = \{(x,y) \longmapsto (axa^{-1}, ay) \;/\; a \in Spin(3)\} \qquad (2)$$

dar. Der Kern der Ebene $\mathcal{P}$ ist dann außerdem stets isomorph zu $\mathbb{R}$.-

Beweis:
Die kanonische Abbildung $K \longrightarrow K|L_\infty = Spin(3)$ ist eine Überlagerung und (da $Spin(3)$ nicht echt überlagert werden kann) daher ein Isomorphismus; also ist $K \cong Spin(3)$ und K wirkt sogar effektiv auf L_∞ . K wirkt linear auf W und S ; $K|W$ und $K|S$ können daher als kompakte zusammenhängende Gruppen bei geeigneter Identifikation von W und S mit $\mathbb{H}$

als Untergruppen von $SO(4)$ aufgefaßt werden.
Würde K effektiv auf W und S wirken, so wären dann $K|W$ und $K|S$ o.B.d.A. gleich $LO(4)$ (3.2.1,3.2.5), also (da K nach 3.2.3 nur innere Automorphismen besitzt) K bezüglich geeigneter Koordinaten die Gruppe $\{(x,y)\longmapsto(ax,ay) \;/\; a\in Spin(3)\}$. K enthielte dann aber das nichttriviale Element $(x,y)\longmapsto(-x,-y)$ des Kerns der Ebene, wäre also nicht effektiv auf L_∞, ein Widerspruch.
Bis auf Vertauschung von W und S können wir also annehmen, daß die kanonische Abbildung $Spin(3)\cong K\longrightarrow K|W$ nichttrivialen Kern hat, der nach 3.2.4 entweder ganz K oder $\mathbb{Z}_2$ ist.
Der erste Fall ist nach 3.1.8 ausgeschlossen, wenn $\mathcal{P}$ nicht desarguesch ist (eine dreidimensionale kompakte auf W ineffektiv wirkende Kollineationsgruppe $K\subseteq\Gamma_{W,S}$ erzwingt aus Dimensionsgründen, daß eine koordinatisierende Divisionsalgebra gleich ihrem Linksnukleus, also ein Körper ist).
Im zweiten Fall ist $K|W$ eine nicht zu $Spin(3)$ isomorphe dreidimensionale kompakte zusammenhängende Untergruppe von $SO(4)$ und nach 3.2.5 folglich (bis auf Konjugation, d.h. bei geeigneter Identifikation von W mit $\mathbb{H}$)

$$K|W = \{W\longrightarrow W : x\longmapsto axa^{-1} \;/\; a\in Spin(3)\}. \qquad (3)$$

In diesem Fall muß nun K auf S effektiv wirken: sonst hätte das Zentrumselement von K sowohl W wie S als Achse, was unmöglich ist. $K|S$ ist also eine zu $Spin(3)$ isomorphe Untergruppe von $GL(4,\mathbb{R})$ und folglich (3.2.5) bis auf geeignete Identifikation von S mit $\mathbb{H}$ gleich $LO(4)$, also

$$K|S = \{S\longrightarrow S : y\longmapsto ay \;/\; a\in Spin(3)\}. \qquad (4)$$

Mit (3) und (4) ergibt sich dann K als die in (2) aufgeführte Gruppe (daß die zunächst separat auf W und S gefundenen Darstellungen der Wirkung von K so einfach ''synchron'' zusammengestellt werden können, ergibt sich mit 3.2.7). Die Gruppe (1) erhält man durch Vertauschung von S und W in den vorstehenden Argumenten.-

Wäre der Kern der Ebene isomorph zu C, so enthielte die Streckungsgruppe $\Gamma_{[0,L_\infty]}$ eine eindimensionale Torusgruppe T. Da $\Gamma_{[0,L_\infty]}$ im Zentrum von Γ_0 liegt (2.2.7) und da K effektiv auf L_∞ wirkt, wäre die von K und T erzeugte Kollineationsgruppe gleich $K\cdot T\cong Spin(3)\times T$. $K\cdot T$ könnte nicht fast effektiv auf S und W wirken, da nach 3.2.8 sonst $K\cong Spin(3)$ ebenfalls auf beiden effektiv wirken müßte, was wir ausgeschlossen haben. $K\cdot T$ hätte also auf einer der beiden Geraden einen mindestens eindimensionalen kompakten Ineffektivitätskern, dessen Zusammenhangskomponente als Normalteiler nach 3.2.6 nur gleich T sein könnte (da K wie gezeigt

im nicht desarguesschen Fall nicht in Frage kommt). Dies stünde im Widerspruch dazu, daß T als Untergruppe von $\Gamma_{[0,L_\infty]}$ effektiv auf W und S wirkt. Also ist der Kern der Ebene R .- □

3.3.2 Lemma.

Läßt eine kompakte achtdimensionale projektive Ebene $\mathcal{P}$ vom Lenz-Typ V eine kompakte zusammenhängende Untergruppe K von $\Gamma_{W,S}$ zu, die auf L_∞ fast effektiv als SO(4) wirkt, so ist $\mathcal{P}$ die desarguesche Ebene.

Beweis:
Entweder ist K selbst isomorph zu SO(4) oder K ist eine echte Überlagerung von SO(4), also isomorph zur universellen Überlagerung Spin(3) × Spin(3) von SO(4) .
K kann dann nicht fast effektiv auf W und S wirken: Nach 3.2.8 würde nämlich sonst ein zu Spin(3) isomorpher Normalteiler von K effektiv auf allen drei Geraden L_∞ , W und S wirken, was nach 3.3.1 ausgeschlossen ist.
K hat also auf einer der beiden Geraden W,S einen mindestens eindimensionalen kompakten Ineffektivitätskern N , desssen Zusammenhangskomponente nach 3.2.5 nur zu Spin(3) isomorph, also dreidimensional sein kann.
Nach 3.1.8 ist folglich $\mathcal{P}$ desarguesch (eine koordinatisierende Divisionsalgebra ist gleich einem ihrer Nuklei). □

3.4 Achtdimensionale Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe: Übersicht .

Bis zum Schluß dieses Paragraphen sei $\mathcal{P}$ stets eine achtdimensionale kompakte projektive Ebene vom Lenz-Typ V .
In diesem Abschnitt soll eine Übersicht hergeleitet werden über die Struktur der Kollineationsgruppe solcher Ebenen für den Fall, daß diese mindestens 17-dimensional ist.
Nach 3.1.7 ist dies gleichbedeutend damit, daß

$$\dim \Gamma_{W,S} \geq 5 \quad . \tag{1}$$

Wie schon in 3.1.8 angesprochen, existiert nun nach 2.3.2 eine kompakte zusammenhängende auf L_∞ fast effektive Untergruppe K von $\Gamma_{W,S}$ derart,

daß

$$\Gamma_{W,S} = K \cdot \Gamma_{[0,L_\infty]} \cdot Y \quad ,$$

wobei Y die Gruppe der positiven reellen Streckungen in S-Richtung ist. Wir gehen im folgenden davon aus, daß K maximal mit diesen Eigenschaften gewählt sei.

Wegen der Linearität der Kollineationen von $\Gamma_{W,S}$ (2.2.7, 2.3.1) liegt $\Gamma_{[0,L_\infty]} \cdot Y$ im Zentrum von $\Gamma_{W,S}$; folglich ist

$$\dim \Gamma_{W,S} = \dim K + 1 + k \quad , \tag{2}$$

wo k die Dimension des Kerns der Ebene (also 1 oder 2) ist.

$\dim \Gamma_{W,S} \geq 5$ heißt also

$$\dim K \geq 3 \tag{3}$$

oder $\dim K \geq 2$ und der Kern der Ebene ist $\mathbb{C}$.

Nach 3.1.6 wirkt K auf $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{R}^4$ als lineare Gruppe und folglich (bis auf Konjugation) als Untergruppe von $SO(4)$. Daß K auf $L_\infty \setminus \{s\}$ wie $SO(4)$ wirkt, wurde in 3.3.2 - außer im desarguesschen Fall - bereits ausgeschlossen. **Für nichtdesarguesche** Ebenen kommen also angesichts der Untergruppenstruktur von $SO(4)$ (3.2.5) nur die folgenden Möglichkeiten 3.4.1 - 3.4.3 in Betracht:

3.4.1

K wirkt auf $L_\infty \setminus \{s\}$ als $U(2)$ oder $LO(4)$:

I1)	$K \mid L_\infty = U(2)$
I2)	$K \mid L_\infty = LO(4) \cong Spin(3)$

Auch im ersten Fall enthält K einen dreidimensionalen Normalteiler, der auf $L_\infty \setminus \{s\}$ als $LO(4)$ und damit transitiv auf den ''Richtungen'' von $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{R}^4$ wirkt. Zusammen mit der Streckungsgruppe Y ergibt sich in beiden Fällen also, daß $\Gamma_{W,S}$ transitiv auf $L_\infty \setminus \{s,w\}$ und damit, in Anbetracht der Transitivität der Scherungsgruppe $\Gamma_{[s,S]}$ (vgl. 3.1.7)

I)	Γ zweifach transitiv auf $L_\infty \setminus \{s\}$

ist. Nach 3.3.1 ergibt sich sich zudem in beiden Fällen

I)	$\mathrm{Ker}\,(\mathfrak{P}) = \mathbb{R}$

(2) liefert dann die Dimension der Kollineationsgruppe in diesen Fällen zu

I1)	$\dim \Gamma = 18$
I2)	$\dim \Gamma = 17$

Die Ebenen dieses Typs werden in 3.5 näher betrachtet.-

3.4.2

Der nächste zu behandelnde Fall ist, daß K auf $L_\infty \setminus \{s\} = \mathbb{R}^4$ konjugiert zu $SO(3) \subseteq SO(4)$ wirkt. K hält dann eine von S und W verschiedene Ursprungsgerade E fest und induziert auf E, W und S isomorphe Transformationsgruppen.
Da K die Punkte O, s, w und die Geraden W, S, E festhält, kann K keine axiale Kollineation mit von L_∞ verschiedener Achse enthalten und wirkt folglich effektiv auf W, S und E.
Als Überlagerungsgruppe von $SO(3)$ ist K isomorph zu $Spin(3)$ oder $SO(3)$ und wirkt also auf den mit $\mathbb{R}^4$ identifizierten affinen Geraden W, S, E - da linear - konjugiert zur kanonischen Wirkung von $LO(4)$ bzw. $SO(3) \subseteq SO(4)$.

a) Im Fall $K \cong Spin(3)$ betrachten wir die Situation in der dualen Ebene $\mathcal{P}^*$ von $\mathcal{P}$: Dort wirkt dann K als $Spin(3)$ effektiv auf der uneigentlichen Geraden L_∞^* (dem Geradenbüschel in $\mathcal{P}$ durch das Translationszentrum s) und nach 3.3.1 ist der Kern von $\mathcal{P}^*$ zunächst einmal isomorph zu $\mathbb{R}$. Bezeichnet W^* die Verbindungsgerade in $\mathcal{P}^*$ der Punkte W und S von $\mathcal{P}^*$ und entsprechend S^* die Verbindungsgerade von W und L_∞, so existiert (ganz entsprechend der Kollineationsgruppe K von $\mathcal{P}$) eine maximale kompakte zusammenhängende auf L_∞^* fast effektive Untergruppe K^* der Kollineationsgruppe Γ_{W^*,S^*} von $\mathcal{P}^*$, die zusammen mit dem Kern und einer weiteren geeigneten Einparameteruntergruppe von Streckungen ganz Γ_{W^*,S^*} erzeugt. Nach 2.3.2 (i) und (ii) ist dabei K^* sogar gekennzeichnet als die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe von Γ_{W^*,S^*} ; K^* enthält also K, und da $K|L_\infty^* = Spin(3)$ und wieder $K^*|L_\infty^*$ eine Untergruppe von $SO(4)$ ist, bleiben angesichts der Untergruppenstruktur von $SO(4)$ (3.2.5) außer im desargueschen Fall nur die 3.4.1 entsprechenden Fälle $K^*|L_\infty^* = U(2)$ oder $K^*|L_\infty^* = Spin(3)$. Die Ebene $\mathcal{P}$ ordnet sich daher ein unter der Rubrik

I*) Duale Ebenen der Ebenen vom Typ I

.

b) Im Fall $K \cong SO(3)$ läßt K einen von 0 verschiedenen Punkt $e \in E$ fest. Koordinatisiert man nun die affine Ebene von $\mathcal{P}$ bezüglich W und S als Koordinatenachsen und e als Einheitspunkt durch eine vierdimensionale Divisionsalgebra D (also mit $e = (1,1)$), so besteht die Standgruppe $\Gamma_{W,S,e}$ bekanntlich aus Abbildungen der Form

$$(x,y) \longmapsto (\sigma(x),\sigma(y)) \quad , \tag{4}$$

wo σ ein Automorphismus der Divisionsalgebra D ist (dies läßt sich leicht etwa aus der in 2.3.1 gegebenen Darstellung von $\Gamma_{W,S}$ ablesen). Wegen $SO(3) \cong K \subseteq \Gamma_{W,S,e}$ hat also D dreidimensionale Automorphismengruppe und ist folglich isomorph zu einer der in 1.3.5 beschriebenen Divisionsalgebren D_τ $(\tau > 0)$.

Wir zeigen umgekehrt, daß für <u>alle</u> $1 \neq \tau > 0$ die Ebene $\mathfrak{D}_\tau$ über der Divisionsalgebra D_τ vom gerade besprochenen Typ ist: Die Gruppe der stetigen Automorphismen von D_τ ist isomorph zu $SO(3)$, und jedes ihrer Elemente σ entspricht nach (4) einer Kollineation von $\mathfrak{D}_\tau$; man erhält so eine zu $SO(3)$ isomorphe (übrigens auf L_∞ effektive) Untergruppe Δ der Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ von $\mathfrak{D}_\tau$. Da nach 1.2.3 der Kern von $\mathfrak{D}_\tau$ isomorph zu $\mathbb{R}$ ist, läßt sich im Fall $\mathcal{P} = \mathfrak{D}_\tau$ die Kollineationsgruppe K kennzeichnen als die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ (2.3.2(i) und (ii)); K enthält also $\Delta \cong SO(3)$. Nach 1.3.5 ist $\mathfrak{D}_\tau$ nicht desarguesch und folglich (3.3.2) $K|L_\infty$ isomorph einer echten Untergruppe von $SO(4)$. Mit der Untergruppenstruktur von $SO(4)$ schließt man $K = \Delta \cong SO(3)$, was gezeigt werden sollte.

Der in Rede stehende Fall umfaßt also genau die Ebenen $\mathfrak{D}_\tau$ und läßt sich im Stenogramm folgendermaßen festhalten:

> II) $\mathcal{P}$ ist die projektive Ebene über einer der Divisionsalgebren D_τ $(0 < \tau \neq 1)$
>
> $\mathrm{Ker}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}$
>
> $\Gamma_{W,S} = \mathrm{Aut}(D_\tau) \cdot R \cdot Y \cong SO(3) \times \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0$
>
> $\dim \Gamma = 17$

Man bemerke, daß sich die Struktur der Kollineationsgruppe in 1.3.7 auch auf rein algebraischem Wege gewinnen ließ.-

3.4.3

Schließlich bleibt noch die Möglichkeit, daß K auf L_∞ wie eine zweidimensionale Untergruppe von $SO(4)$, d.h. (3.2.5) als Torusgruppe T^2 wirkt; in Anbetracht von (2) und (3) ergeben sich für diesen Typ die Charakteristiken

III)	$K\|L_\infty \cong T^2$
	$\mathrm{Ker}(\mathcal{P}) = \mathbb{C}$
	$\dim \Gamma = 17$

Die Ebenen dieser Art werden in 3.6 näher betrachtet.-

3.5 Achtdimensionale Ebenen vom Lenz-Typ V mit hochgradig homogener uneigentlicher Gerade .

In diesem Abschnitt werden die in 3.4.1 genannten Ebenen eingehend behandelt.

$\cdot$ bedeutet stets die Quaternionenmultiplikation; die Multiplikation in nichtassoziativen Divisionsalgebren wird zur Unterscheidung durch $\circ$ wiedergegeben. $\mathbb{H}$ wird als Vektorraum über die Basis $\{1,i,j,k\}$ mit $\mathbb{R}^4$ identifiziert.

3.5.1 Satz.

Sei $\mathcal{P}$ eine (nicht desarguesche) kompakte achtdimensionale projektive Ebene vom Lenz-Typ V ; K eine maximale kompakte zusammenhängende auf L_∞ fast effektive Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ derart, daß $K|L_\infty = U(2)$ oder $K|L_\infty = \mathrm{Spin}(3)$. Dann gilt:

a) $\mathcal{P}$ ist isomorph zu einer der folgenden Ebenen:

(i) der Ebene $\mathcal{T}_A^S$ über einer Divisionsalgebra

$$T_A^S = \mathbb{R}^4 \quad \text{mit Multiplikation}$$
$$m \circ x = m \cdot A(m^{-1} \cdot A^{-1}(x) \cdot m) \qquad (0 \neq m \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H})$$

oder

(ii) der Ebene $\mathcal{T}_A^W$ über einer Divisionsalgebra

$$T_A^W = \mathbb{R}^4 \quad \text{mit Multiplikation}$$
$$m \circ x = A^{-1}(b \cdot A(b^{-1}x) \cdot b^{-1}), \text{ wobei } b \cdot A(b^{-1}) \cdot b^{-1} = A(m)$$
$$(0 \neq m \in \mathbb{R}^4 = \mathbb{H});$$

jeweils mit geeigneter ''Deformationsmatrix''

$$A \in GL(4,\mathbb{R}) \; ; \; A(1) = 1 \qquad .$$

b) Der Fall $K|L_\infty \cong U(2)$ liegt genau dann vor, wenn dabei zusätzlich A so gewählt werden kann, daß

$$A(zxz^{-1}) = z\cdot A(x)\cdot z^{-1} \quad \text{für alle } x\in H,\ z\in\langle 1,i\rangle \ ;$$

und in affinen Koordinaten über T_A^S bzw. T_A^W ist dann

(i) für $\mathcal{T}_A^S$:

$$\Gamma_{W,S} = \left\{ \begin{array}{l} (\xi,\eta)\mapsto(r\cdot A(a\cdot A^{-1}(\xi)\cdot a^{-1}) \ , \ t\cdot a\eta z^{-1} \ ) \ / \\ r,t\in\mathbb{R}^\circ;\ a\in \mathrm{Spin}(3)\ ;\ z\in T = \langle 1,i\rangle\cap \mathrm{Spin}(3) \end{array} \right\}$$

(transitiv auf $S\setminus\{0\}$ und $L_\infty\setminus\{s,w\}$)

(ii) für $\mathcal{T}_A^W$ mit entsprechenden Bezeichnungen:

$$\Gamma_{W,S} = \{(\xi,\eta)\mapsto(r\cdot a\xi z^{-1} \ , \ t\cdot A^{-1}(a\cdot A(\eta)\cdot a^{-1}) \ )\}$$

(transitiv auf $W\setminus\{0\}$ und $L_\infty\setminus\{s,w\}$) ;

immer ist also

$$\Gamma_{W,S} \cong U(2)\times\mathbb{R}^\circ\times\mathbb{R}^\circ \ .$$

c) Im Fall $K|L_\infty \cong \mathrm{Spin}(3)$ ist

$$\Gamma_{W,S} \cong \mathrm{Spin}(3)\times\mathbb{R}^\circ\times\mathbb{R}^\circ$$

und zwar (mit gleichen Bezeichnungen wie in b))

(i) für $\mathcal{T}_A^S$:

$$\Gamma_{W,S} = \{(\xi,\eta)\mapsto(r\cdot A(a\cdot A^{-1}(\xi)\cdot a^{-1} \ , \ t\cdot a\eta \ )\}$$

(ii) für $\mathcal{T}_A^W$:

$$\Gamma_{W,S} = \{(\xi,\eta)\mapsto(r\cdot a\xi \ , \ t\cdot A^{-1}(a\cdot A(\eta)\cdot a^{-1}) \ )\} \quad .-$$

Bemerkung: Die angegebenen Multiplikationen liefern selbverständlich nicht für jedes $A\in GL(4,\mathbb{R})$ eine Divisionsalgebra. Eine explizite Bestimmung der Matrizen A , für die das der Fall ist, würde im allgemeinen Fall über uferlose Rechnungen zu einem wohl unerfreulich zu formulierenden Ergebnis führen. Im Spezialfall $K|L_\infty \cong U(2)$ ist diese Aufgabe jedoch zugänglicher und da dieser Fall nach der Übersicht 3.4 gerade die nichtdesarguesschen Ebenen vom Lenz-Typ V mit größtmöglicher Kollineationsgruppe (der Dimension 18) beinhaltet, werden wir dafür diese Bestimmung im weiteren durchführen (was dann auch die Frage der Existenz von Ebenen des hier besprochenen Typs positiv beantwortet).
In allgemeinerem Rahmen als dem hier gesteckten erhebt sich natürlich die Frage, ob für gewisse A die angegebenen Multiplikationen nichtdistributive Quasikörper definieren, ob also die hier besprochenen

Ebenen sich in eine umfassendere Klasse von Translationsebenen einordnen. In dieser Arbeit soll auf diese weiterführende Frage nicht eingegangen werden.

Beweis:

Wir vermerken zunächst, daß $K|L_\infty$ in beiden Fällen einen zu Spin(3) isomorphen Normalteiler enthält und folglich nach 3.3.1 der Kern der Ebene $\mathcal{P}$ zu $\mathbb{R}$ isomorph ist. Daher ist nach 2.3.2 (i) und (ii) K die größte kompakte zusammenhängende Untergruppe von $\Gamma_{W,S}$ und man hat

$$\Gamma_{W,S} = K \cdot R \cdot Y$$

(Y die Gruppe der positiven reellen Streckungen in S-Richtung).-

Zuerst sei nun der Fall $K|L_\infty \cong U(2)$ erörtert.

K überlagert U(2) endlich und ist folglich isomorph zu U(2) oder $Spin(3) \times \mathbb{T}$. In beiden Fällen ist K Produkt seiner beiden einzigen zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler $\Delta \cong Spin(3)$ und $T \cong \mathbb{T}$ der Dimension 3 und 1 (vgl. 3.2.6).
Δ wirkt auf L_∞ effektiv (3.2.8) und folglich nach 3.3.1 effektiv und als LO(4) auf genau einer der beiden Fixgeraden S und W, auf der anderen nicht effektiv als SO(3). Wieder nach 3.2.8 kann folglich K nicht fast effektiv auf beiden Fixgeraden S und W wirken. Als Zusammenhangskomponente eines nicht endlichen Ineffektivitätskerns auf S oder W kommt nur der eindimensionale Normalteiler T in Frage. Da T nicht ineffektiv auf beiden Geraden operieren kann (**eine Kollineation hat höchstens eine Achse**), **wirkt also K** auf genau einer der beiden Geraden S und W fast effektiv (und zwar nach 3.2.8 dort, wo Δ effektiv wirkt); auf der andern wirkt T ineffektiv, also K wie Δ als SO(3). Die effektive Wirkung auf der einen Geraden ist bis auf geeignete Identifikation der affinen Geraden mit $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ durch eine vierdimensionale zusammenhängende kompakte Untergruppe von SO(4) und somit nach 3.2.5 durch $\{\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : x \mapsto axz^{-1} \;/\; a \in Spin(3) \;;\; z \in \mathbb{T}\}$ gegeben, wobei Spin(3) dem Normalteiler Δ entspricht. Über Δ läßt sich dann die ineffektive Wirkung auf der anderen Geraden nach 3.2.7 ''synchronisieren''; bis auf geeignete Identifikation der affinen Geraden W und S mit $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ ist also entweder

$$K = \{W \times S \to W \times S : (x,y) \mapsto (axa^{-1},\ ayz^{-1}) \;/\; a \in Spin(3);\ z \in \mathbb{T}\} \qquad (1\text{-i})$$

oder entsprechend

$$K = \{(x,y) \longmapsto (axz^{-1},\ aya^{-1})\} \quad . \tag{1-ii}$$

Im Hinblick auf die Koordinatisierung der affinen Ebene durch eine Divisionsalgebra mit W und S als Koordinatenachsen werden nun auf W und S linear transformierte neue Koordinaten ξ und η eingeführt so, daß die affine Ursprungsgerade E durch den Punkt $e = (x=1, y=1)$ gerade $\{(\xi,\xi) \,/\, \xi \in \mathbb{R}^4\}$ wird und e auch im (ξ,η) - System die Koordinaten $(1,1)$ behält. E als zu S und W komplementärer linearer Teilraum von $W \times S$ ist von der Form $\{(x,y = Ax) \,/\, x \in W = \mathbb{R}^4\}$, wobei $A \in GL(4,\mathbb{R})$ mit $A(1) = 1$. Koordinaten der gesuchten Art erhält man folglich entweder durch

$$\xi = Ax\ ,\quad \eta = y \tag{2-i}$$

oder durch

$$\xi = x\ ,\quad \eta = A^{-1}(y) \quad . \tag{2-ii}$$

Transformiert man nun (1-i) mit (2-i) und (1-ii) mit (2-ii), so erhält man für $\Gamma_{W,S} = K \cdot R \cdot Y$ bereits die in der Behauptung b) notierte Form. Die entsprechend notierte Untergruppe

$$\{(\xi,\eta) \longmapsto (\ A(z \cdot A^{-1}(\xi) \cdot z^{-1})\ ,\ z\eta z^{-1}\ )\ /\ z \in \mathfrak{k}\}$$

bzw.

$$\{(\xi,\eta) \longmapsto (\ z\xi z^{-1}\ ,\ A^{-1}(z \cdot A(\eta) \cdot z^{-1})\ )\ /\ z \in \mathfrak{k}\}$$

von $\Gamma_{W,S}$ hält den Punkt $(1,1)$ und folglich auch die Ursprungsgerade $E = \{(\xi,\xi) \,/\, \xi \in \mathbb{R}^4\}$ durch diesen Punkt fest, woraus $A(z \cdot A^{-1}(\xi) \cdot z^{-1}) = z\xi z^{-1}$ bzw. $A^{-1}(z \cdot A(\xi) \cdot z^{-1}) = z\xi z^{-1}$ für alle ξ, also $z \cdot A(x) \cdot z^{-1} = A(zxz^{-1})$ für alle x folgt.
Ferner führt der dreidimensionale Normalteiler Δ von K zusammen mit gewissen Streckungen je nach Fall zu einer auf $S \setminus \{0\}$ scharf transitiven Untergruppe

$$\Delta^S = \{(\xi,\eta) \longmapsto (\ A(b \cdot A^{-1}(\xi) \cdot b^{-1})\ ,\ b\eta\ ) /\ b \in H^x\} \tag{3-i}$$

von $\Gamma_{W,S}$ oder zu einer auf $W \setminus \{0\}$ scharf transitiven Untergruppe

$$\Delta^W = (\xi,\eta) \longmapsto (\ b\xi\ ,\ A^{-1}(b \cdot A(\eta) \cdot b^{-1})\ )\ /\ b \in H^x\} \quad . \tag{3-ii}$$

Die Transitivität dieser Untergruppen wird im folgenden zur Bestimmung der Multiplikation einer koordinatisierenden Divisionsalgebra ausgenutzt. Dabei sind die beiden Fälle (i) und (ii) getrennt zu behandeln.

Fall (i) (Transitivität auf $S \setminus \{0\}$) . Sei T_A^S die die affine Ebene koordinatisierende Divisionsalgebra bezüglich W und S als Koordinatenachsen und (1,1) als Einheitspunkt; $\circ$ ihre Multiplikation. Die Kollineationsgruppe Δ^S hält die ''senkrechte'' Gerade $\{(1,\eta) \;/\; \eta \in \mathbb{R}^4\}$ fest und wirkt scharf transitiv auf ihren nicht auf W liegenden Punkten. Die Ursprungsgerade $\{(\xi, m\circ\xi) \;/\; \xi \in \mathbb{R}^4\}$ mit Steigung $m \neq 0$ ist also gerade die Transformierte der Geraden E unter der Kollineation aus Δ^S, die (1,1) in (1,m) überführt, d.h. gleich der Geraden $\{(A(m\cdot A^{-1}(\xi)\cdot m^{-1}),\ m\cdot\xi) \;/\; \xi \in \mathbb{R}^4\}$. Für $x = A(m\cdot A^{-1}(\xi)\cdot m^{-1})$ ist also $m\circ x = m\cdot\xi$, das heißt

$$m \circ x = m\cdot A(m^{-1}\cdot A^{-1}(x)\cdot m) \ ,$$

wie in a) unter (i) behauptet.-

Fall (ii) (Transitivität auf $W \setminus \{0\}$) . Sei entsprechend T_A^W die koordinatisierende Divisionsalgebra bezüglich W,S und $e = (1,1)$ mit Multiplikation $\circ$. Die Kollineationsgruppe Δ^W hält die ''waagrechte'' Gerade $\{(\xi,1) \;/\; \xi \in \mathbb{R}^4\}$ fest und wirkt scharf transitiv auf ihren nicht auf S liegenden Punkten, folglich scharf transitiv auf $L_\infty \setminus \{s,w\}$. Die Ursprungsgerade $\{(\xi, m\circ\xi) \;/\; \xi \in \mathbb{R}^4\}$ mit Steigung $m \neq 0$,d.h. die Ursprungsgerade durch (1,m) , ist also die Transformierte von E der Form

$$\{(b\xi\ ,\ A^{-1}(b\cdot A(\xi)\cdot b^{-1})) \;/\; \xi \in \mathbb{R}^4\}$$

unter demjenigen Element von Δ^W , das durch $A^{-1}(b\cdot A(\xi)\cdot b^{-1}) = m$ für $b\xi = 1$, also durch $b \in H^\times$ mit

$$b\cdot A(b^{-1})\cdot b^{-1} = A(m)$$

eindeutig gekennzeichnet ist. Für $x = b\xi$ ist dann $m\circ x = A^{-1}(b\cdot A(\xi)\cdot b^{-1})$, also

$$m \circ x = A^{-1}(b\cdot A(b^{-1}x)\cdot b^{-1}) \ ,$$

wie in a) unter (ii) behauptet.

Damit ist der Satz für den Fall $K|L_\infty \cong U(2)$ bewiesen.-

Man bemerke nun, daß für die Herleitung der Multiplikation koordinatisierender Divisionsalgebren nur der auf L_∞ als Spin(3) wirkende Normalteiler $\Delta \cong \mathrm{Spin}(3)$ von K benötigt wurde; im Fall $K|L_\infty \cong \mathrm{Spin}(3)$ erhält man folglich das völlig entsprechende Ergebnis, wenn man in den vorstehenden Argumenten Δ durch K ersetzt; die Koordinaten (x,y) , von denen man auszugehen hat, erhält man dabei direkt aus 3.3.1 .- □

Der folgende Satz zeigt, daß die Ebenen aus 3.5.1 zu drei wesentlich verschiedenen - durch Transitivitätsaussagen über $\Gamma_{W,S}$ charakterisierten - Ebenenfamilien führen; drei Familien deshalb, weil wir die dualen Ebenen mit einbeziehen, die ja in der Übersicht in 3.4.2 als besonderer Typ erscheinen.

3.5.2 Satz.

Seien $\mathcal{T}_A^S$, $\mathcal{T}_B^S$, $\mathcal{T}_C^W$ nicht desarguesche Ebenen vom Lenz-Typ V der in 3.5.1 beschriebenen Art; $(\mathcal{T}_A^S)^*$, $(\mathcal{T}_B^S)^*$, $(\mathcal{T}_C^W)^*$ ihre dualen Ebenen. Dann gilt:

a) $(\mathcal{T}_C^W)^*$ ist isomorph zu $\mathcal{T}_{C'}^W$ für geeignetes C' .

b) Die Ebenen $\mathcal{T}_A^S$, $(\mathcal{T}_B^S)^*$ und $\mathcal{T}_C^W$ sind stets paarweise nicht-isomorph .

Beweis:

a) Der Beweis des Klassifikationssatzes 3.5.1 (vgl. dort etwa (3-ii)) zeigt, daß die Ebenen der Bauart $\mathcal{T}_C^W$ dadurch gekennzeichnet sind, daß $\Gamma_{W,S}$ eine zu $\mathrm{Spin}(3) \times \mathbb{R}^0 = \mathbb{H}^\times$ isomorphe Kollineationsgruppe Δ^W enthält, die auf $L_\infty \setminus \{w,s\}$ und auf $W \setminus \{0\}$ scharf transitiv operiert und einen von 0 verschiedenen Punkt auf S festhält. Diese Konfiguration geht bei Dualisierung der Ebene in eine völlig entsprechende über, wie man leicht sieht; folglich ist die duale Ebene wieder von derselben Art.

b) Wir beschreiben zunächst drei den Geraden L , S , W in $\mathcal{T}_B^S$ entsprechende Geraden von $(\mathcal{T}_B^S)^*$: Bei Dualisierung wird die Translationsachse L_∞ von $\mathcal{T}_B^S$ zum Translationszentrum von $(\mathcal{T}_B^S)^*$; S (da mit dem Translationszentrum inzident) zu einem vom Translationszentrum verschiedenen Punkt der uneigentlichen Geraden von $(\mathcal{T}_B^S)^*$ und W zu einem eigentlichen Punkt. Die Verbindungsgerade von L_∞ und S in $(\mathcal{T}_B^S)^*$ ist also die uneigentliche Gerade L_∞^* von $(\mathcal{T}_B^S)^*$; seien S^* bzw. W^* die (affin aufgefaßten) Verbindungsgeraden von W und L_∞ bzw. W und S in $(\mathcal{T}_B^S)^*$.-
Nach 3.5.1 ist

- $\Gamma_{W,S}$ in $\mathcal{T}_A^S$ transitiv auf $S \setminus \{0\}$ und $L_\infty \setminus \{w,s\}$, aber nicht auf $W \setminus \{0\}$;

entsprechend durch Dualisierung

- Γ_{W^*,S^*} in $(\mathcal{T}_B^S)^*$ transitiv auf $S^* \setminus \{W\}$ und $W^* \setminus \{W\}$, aber nicht auf $L_\infty^* \setminus \{L_\infty, S\}$;

und schließlich

- $\Gamma_{W,S}$ in $\mathcal{T}_C^W$ transitiv auf $W \setminus \{0\}$ und $L_\infty \setminus \{w,s\}$, aber nicht auf $S \setminus \{0\}$.

Ein Isomorphismus Ψ zwischen zweien dieser drei Ebenen würde zunächst die ausgezeichneten Elemente Translationsachse und Translationszentrum der einen Ebene in die entsprechenden der anderen Ebene überführen . Er könnte dann ferner wegen der Transitivität von Translations- und Scherungsgruppen der Ebenen so abgeändert werden, daß er die Geraden S und W (bzw. S^* und W^*) in die gleichnamigen überführt (also S in S, S in S^* oder S^* in S und entsprechend für W). Vermittels Ψ wären dann die jeweiligen Standgruppen $\Gamma_{W,S}$ bzw. Γ_{W^*,S^*} als Transformationsgruppen der Punktmenge der Ebenen isomorph und müßten auf gleichnamigen Geraden in gleicher Weise wirken, was - wie wir festgestellt haben - nicht der Fall ist. □

In der Folge wird der Klassifikationssatz 3.5.1 für die Fälle größtmöglicher Kollineationsgruppe präzisiert:

3.5.3 Satz.

$A \in GL(4,\mathbb{R})$ genüge den Bedingungen

$$A(1) = 1 \quad \text{und} \quad A(zxz^{-1}) = z \cdot A(x) \cdot z^{-1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{H} \text{ und } z \in \mathbb{T} .$$

a) Dann ist $T_A^S = \mathbb{R}^4$ mit der Multiplikation

$$m \circ x = m \cdot A(m^{-1} \cdot A^{-1}(x) \cdot m)$$

genau dann eine Divisionsalgebra, wenn A (als Matrix bezüglich der Basis $\{1,i,j,k\}$ von $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$) die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\delta & & \\ & \gamma & & \\ & & \gamma & \delta \\ & & -\delta & \gamma \end{pmatrix}$$

hat.

Bis auf Isomorphie ergeben sich auf diese Weise gerade die Divisionsalgebren

$$T_\alpha^S = \mathbb{R}^4 \quad \text{mit Multiplikation}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 & -\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}m_3 - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}m_4 & -\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}m_4 + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}m_3 \\ m_2 & m_1 & \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}m_4 - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}m_3 & -\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}m_3 - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}m_4 \\ m_3 & -m_4+2\alpha m_3 & m_1 & m_2 \\ m_4 & m_3+2\alpha m_4 & -m_2 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

wobei $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$.

Die Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ der durch T^S_α koordinatisierten projektiven Ebene $\mathcal{T}^S_\alpha$ ist

$$\Gamma_{W,S} = \left\{ (\xi,\eta) \mapsto (ra^{-1}\cdot(a\circ\xi),\ ta\eta z^{-1}) \Big/ \begin{matrix} r,t \in \mathbb{R}^\circ;\ a \in \mathbb{H}\ ,\ z \in \langle 1,i \rangle ; \\ |a| = 1 = |z| \end{matrix} \right\} .$$

T^S_α und T^S_β $(\alpha,\beta \geqslant 0)$ sind genau dann isotop, wenn $\alpha = \beta$.

b) $T^W_A = \mathbb{R}^4$ mit der Multiplikation

$$m \circ x = A^{-1}(b\cdot A(b^{-1}x)\cdot b^{-1}), \text{ wobei } b\cdot A(b^{-1})\cdot b^{-1} = A(m)$$

ist genau dann eine Divisionsalgebra, wenn A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & \gamma & & \\ & & \gamma & \\ & & & \gamma \end{pmatrix}$$

hat. Bis auf Isomorphie ergeben sich auf diese Weise gerade die Divisionsalgebren

$$T^W_\alpha = \mathbb{R}^4 \quad \text{mit Multiplikation}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 & -m_3 - 2\alpha m_4 & -m_4 + 2\alpha m_3 \\ m_2 & m_1 & m_4 & -m_3 \\ m_3 & -m_4 & m_1 & m_2 \\ m_4 & m_3 & -m_2 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ,$$

wobei $0 \leqslant \alpha \in \mathbb{R}$.

Die Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ der durch T^W_α koordinatisierten projektiven Ebene $\mathcal{T}^W_\alpha$ ist

$$\Gamma_{W,S} = \left\{ (\xi,\eta) \longmapsto (r a \xi z^{-1},\ t a^{-1} \circ (a\eta)) \ \Big/ \ \begin{matrix} r,t \in \mathbb{R}^{\circ};\ a \in \mathbb{H},\ z \in \langle 1,i \rangle ; \\ |a| = 1 = |z| \end{matrix} \right\} .$$

T^W_α und T^W_β sind genau dann isotop, wenn $\alpha = \beta$.-

Bemerkung: Insbesondere sind T^S_α und T^W_α genau dann Körper, wenn $\alpha = 0$ und in diesem Fall ergibt sich jeweils gerade die umgekehrte Quaternionenmultiplikation.

Beweis:

Wir ermitteln zunächst die allgemeine Gestalt von A als Matrix bezüglich der Basis $\{1,i,j,k\}$ von $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$.
Nach Voraussetzung kommutiert A mit allen Rotationen

$$\varrho_z : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 : x \longmapsto zxz^{-1} \qquad (0 \neq z \in \langle 1,i \rangle) ;$$

die Gruppe dieser Rotationen läßt genau den Unterraum $\langle 1,i \rangle$ punktweise fest und induziert die volle Drehgruppe auf dem global invariant gelassenen Unterraum $\langle j,k \rangle$. A führt also $\langle 1,i \rangle$ und $\langle j,k \rangle$ ebenfalls in sich über; auf $\langle j,k \rangle$ kommutiert A mit allen eigentlichen Drehungen und ist folglich dort eine eigentliche Drehstreckung. Wegen $A(1) = 1$ ist also allgemein jedenfalls

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \delta \\ & & -\delta & \gamma \end{pmatrix} .$$

a) Eine notwendige Bedingung dafür, daß T^S_A eine Divisionsalgebra ist, ist die Linearität des Ausdrucks $m \circ x$ in m für alle festen $x \neq 0$ (als Ausdruck der Rechtsdistributivität der Multiplikation).

Diese Bedingung ist dann sogar hinreichend: Die Linksdistributivität ist in T^S_A ohnehin gegeben; und die Determinante der Linksmultiplikation $x \mapsto m \circ x$ mit $m \neq 0$ ergibt sich anhand der Definition von $\circ$ ohne weiteres als die Determinante der Rechtsmultiplikation mit m im Körper $\mathbb{H}$, ist also von 0 verschieden; mit anderen Worten: die Linksmultiplikation mit einem festen von 0 verschiedenen Element führt zu einer bijektiven Abbildung. Dann ist aber bekanntlich für $x \neq 0$ auch die Abbildung $m \longmapsto m \circ x$ bijektiv, sofern linear: sonst gäbe es $m \neq 0$ mit $m \circ x = 0$, im Widerspruch zur Nichtsingularität der Linksmultiplikation mit m .
Wie aus der Definition von $\circ$ ersichtlich, ist nun $m \circ x$ genau dann linear in m für alle x , wenn die Koeffizienten der Matrix der

linearen Abbildung

$$m \cdot A(m^{-1} - m) : y \longmapsto m \cdot A(m^{-1} y m)$$

Linearkombinationen der Komponenten (m_1, m_2, m_3, m_4) von m sind. Mit der bekannten Matrizendarstellung der Quaternionenmultiplikation ergibt sich in Matrizenform

$$m \cdot A(m^{-1} - m) =$$

$$= \frac{1}{\sum m_\nu^2} \begin{pmatrix} m_1 & -m_2 & -m_3 & -m_4 \\ m_2 & m_1 & -m_4 & m_3 \\ m_3 & m_4 & m_1 & -m_2 \\ m_4 & -m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sigma & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \delta \\ & & -\delta & \gamma \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2 & 2(m_1 m_4 + m_2 m_3) & 2(m_2 m_4 - m_1 m_3) \\ 0 & 2(m_2 m_3 - m_1 m_4) & m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 & 2(m_3 m_4 + m_1 m_2) \\ 0 & 2(m_2 m_4 + m_1 m_3) & 2(m_3 m_4 - m_1 m_2) & m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 + m_4^2 \end{pmatrix} .$$

Der Koeffizient in Position (3,3) der Produktmatrix ist

$$\frac{1}{\sum m_\nu^2} \cdot \left[\begin{array}{l} 2\sigma(m_1 m_3 m_4 + m_2 m_3^2) + 2\beta(m_1 m_4^2 + m_2 m_3 m_4) + \\ + \gamma(m_1^3 + m_1 m_2^2 + m_1 m_3^2 - m_1 m_4^2) + \delta(-m_1^2 m_2 - m_2^3 + m_2 m_3^2 - m_2 m_4^2) - \\ - 2\gamma m_2 m_3 m_4 + 2\delta m_1 m_3 m_4 \end{array} \right] .$$

Damit dieser Ausdruck eine Linearkombination (mit konstanten Koeffizienten) der m_ν ist, dürfen im Zähler nur Glieder in $m_\nu^2 m_\mu$ auftreten. Für die Koeffizienten der Produkte $m_1 m_3 m_4$ und $m_2 m_3 m_4$ liefert das die Bedingungen $2\sigma + 2\delta = 0$ und $2\beta - 2\gamma = 0$, also

$$\sigma = -\delta \quad \text{und} \quad \beta = \gamma \qquad . \qquad (1)$$

Unmittelbare Rechnung liefert dann

$$m \cdot A(m^{-1} - m) = \begin{pmatrix} m_1 & -\delta m_1 - \gamma m_2 & -\gamma m_3 - \delta m_4 & \delta m_3 - \gamma m_4 \\ m_2 & \gamma m_1 - \delta m_2 & -\delta m_3 + \gamma m_4 & -\gamma m_3 - \delta m_4 \\ m_3 & \delta m_3 - \gamma m_4 & \gamma m_1 - \delta m_2 & \delta m_1 + \gamma m_2 \\ m_4 & \gamma m_3 + \delta m_4 & -\delta m_1 - \gamma m_2 & \gamma m_1 - \delta m_2 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist in der Tat linear in (m_1, m_2, m_3, m_4); T_A^S ist

also genau dann eine Divisionsalgebra, wenn A der Bedingung (1) genügt.

Nach Definition der Multiplikation in T_A^S ergibt sich dann die Matrix von $x \longmapsto m \circ x$ durch Rechtsmultiplikation der Matrix von $m \cdot A(m^{-1} - m)$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\delta & & \\ & \gamma & & \\ & & \gamma & \delta \\ & & -\delta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \delta/\gamma & & \\ & 1/\gamma & & \\ & & \gamma/(\gamma^2+\delta^2) & -\delta/(\gamma^2+\delta^2) \\ & & \delta/(\gamma^2+\delta^2) & \gamma/(\gamma^2+\delta^2) \end{pmatrix};$$

und die Rechnung führt, indem man $\alpha = \delta/\gamma$ setzt, gerade zu der in der Behauptung angegebenen Multiplikationsmatrix von T_α^S, zunächst allerdings noch mit beliebigem (d.h. nicht notwendig positivem) α. Man verifiziert jedoch unmittelbar, daß die Abbildung $(x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto (x_1,-x_2,-x_3,x_4)$ ein Algebra-Isomorphismus von T_α^S auf $T_{-\alpha}^S$ ist, so daß also bis auf Isomorphismus $\alpha \geqslant 0$ gewählt werden kann.

Die Darstellung von $\Gamma_{W,S}$ liest man unmittelbar in 3.5.1b) ab.-

Wir wenden uns jetzt dem Isotopieproblem der Algebren T_α^S zu, dessen Lösung durch Rückgriff auf die Kollineationsgruppen der Ebenen $\mathcal{T}_\alpha^S$ über diesen Algebren wesentlich erleichtert wird.

Sind T_α^S und T_β^S $(\alpha,\beta \geqslant 0)$ isotop, so existiert (nach 3.1.5) ein (stetiger) Isomorphismus projektiver Ebenen $\Psi : \mathcal{T}_\alpha^S \longrightarrow \mathcal{T}_\beta^S$. Ψ führt Translationsachse in Translationsachse und Translationszentrum in Translationszentrum über. Wegen der Transitivität der Translations- und Scherungsgruppen und der Transitivität von $\Gamma_{W,S}$ auf $L_\infty \setminus \{W,S\}$ läßt sich Ψ so modifizieren, daß darüberhinaus S in S, W in W und die Einheitsgerade E durch $(1,1)$ in E übergeführt werden. Wie man am besten in der Darstellung von $\Gamma_{W,S}$ aus 3.5.1b) abliest, ist der einzige eindimensionale Teilraum von $W = \mathbb{R}^4$, der unter ganz $\Gamma_{W,S}$ in beiden Ebenen invariant gelassen wird, derjenige durch $(1,0)$; also ist dann $\Psi(1,0) = (r,0)$ für $0 \neq r \in \langle 1 \rangle \subseteq T_\beta^S$ und durch Komposition mit einer Streckung in $\mathcal{T}_\beta^S$ können wir also noch erreichen, daß $\Psi(1,0) = (1,0)$, also auch (wegen $\Psi(E) = E$) $\Psi(1,1) = (1,1)$. Dann wird aber Ψ beschrieben durch einen (nach 1.3.3 linearen) Isomorphismus C der koordinatisierenden Divisionsalgebren T_α^S und T_β^S.

Wenn wir (wie immer) T^S_α und T^S_β als Vektorräume mit $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ identifizieren, so ist die Determinante der Linksmultiplikation mit m in beiden Algebren (wie schon bemerkt) gleich der in den Quaternionen, d.h. dem Quadrat des Normquadrats $N(m) = \sum m_\nu^2$ von m ; und C als Algebra-Isomorphismus läßt diese Determinante invariant (vgl. etwa den Anfang des Beweises von 1.2.2) . Vermöge dieser Identifikation kann dann also C aufgefaßt werden als ein orthogonaler Automorphismus des normierten Raums $\mathbb{H}$, welcher 1 fest und infolgedessen $\langle i,j,k\rangle$ invariant läßt . Insbesondere enthält $\langle j,k\rangle \cap C^{-1}\langle j,k\rangle$ ein von 0 verschiedenes Element $m = (0,0,m_3,m_4)$; wie man anhand der Definition der Multiplikation von T^S_α unmittelbar verifiziert, ist dann

$$\mathrm{Re}\ m \underset{\alpha}{\circ} m = -\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}(m_3^2 + m_4^2) = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} N(m)$$

und entsprechendes gilt für $C(m) \in \langle j,k\rangle$ in T^S_β .

Da C Realteile erhält und ein Algebra-Isomorphismus von T^S_α auf T^S_β ist, ergibt sich daraus

$$\frac{\beta^2-1}{\beta^2+1} N(m) = \frac{\beta^2-1}{\beta^2+1} N(C(m)) = \mathrm{Re}\,(C(m) \underset{\beta}{\circ} C(m)) = \mathrm{Re}\, C(m \underset{\alpha}{\circ} m) =$$
$$= \mathrm{Re}\,(m \underset{\alpha}{\circ} m) = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} N(m) \quad ,$$

also $\alpha^2\beta^2 + \beta^2 - \alpha^2 - 1 = \alpha^2\beta^2 - \beta^2 + \alpha^2 - 1$, $\beta^2 = \alpha^2$ und wegen $\alpha,\beta \geqslant 0$ folglich $\alpha = \beta$, wie behauptet.-

b) Notwendig dafür, daß T^W_A eine Divisionsalgebra ist, ist die Linearität von $m \circ x = A^{-1}(b \cdot A(b^{-1}x)\cdot b^{-1})$ in $m = A^{-1}(b\cdot A(b^{-1}\cdot 1)\cdot b^{-1})$; mit anderen Worten: die Matrix bezüglich der Basis $\{1,i,j,k\}$ von $A^{-1}(b\cdot A(b^{-1}\,-)\cdot b^{-1})$ und damit von $c^{-1}\cdot A(c\,-)\cdot c$ ($c = (c_1,c_2,c_3,c_4) \in \mathbb{H}$) muß mit ihren Koeffizienten linear von den Koeffizienten der ersten Spalte abhängen.
Mit der eingangs aufgestellten allgemeinen Form der Matrix von A ergibt sich die Matrix von $c^{-1}\cdot A(c\,-)\cdot c$ als

$$c^{-1}\cdot A(c\,-)\cdot c =$$

$$= \frac{1}{\sum c_\nu^2}\begin{pmatrix} c_1^2+c_2^2+c_3^2+c_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1^2+c_2^2-c_3^2-c_4^2 & 2(c_1c_4+c_2c_3) & 2(c_2c_4-c_1c_3) \\ 0 & 2(c_2c_3-c_1c_4) & c_1^2-c_2^2+c_3^2-c_4^2 & 2(c_3c_4+c_1c_2) \\ 0 & 2(c_2c_4+c_1c_3) & 2(c_3c_4-c_1c_2) & c_1^2-c_2^2-c_3^2+c_4^2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & \sigma & & \\ & \beta & & \\ & & \gamma & \delta \\ & & -\delta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ c_2 & c_1 & -c_4 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & -c_2 \\ c_4 & -c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix} .$$

Für die Koeffizienten $\mu_{\nu,\lambda}$ dieser Produktmatrix errechnet man

$$\mu_{11} = \frac{1}{\sum c_\nu^2}\left[(c_1+\sigma c_2)(\sum c_\nu^2)\right]$$

$$\mu_{21} = \frac{1}{\sum c_\nu^2}\left[2\delta c_1c_3^2 + 2\delta c_1c_4^2 + \beta c_1^2c_2 + \beta c_2^3 + (2\gamma-\beta)c_2c_3^2 + (2\gamma-\beta)c_2c_4^2\right]$$

$$\mu_{31} = \frac{1}{\sum c_\nu^2}\left[\gamma c_1^2c_3 + (2\beta-\gamma)c_2^2c_3 + \gamma c_3^3 + \gamma c_3c_4^2 + \delta c_1^2c_4 - \delta c_2^2c_4 - \delta c_3^2c_4 - \delta c_4^3 - \right.$$
$$\left. - 2\delta c_1c_2c_3 + 2(\gamma-\beta)c_1c_2c_4\right]$$

$$\mu_{41} = \frac{1}{\sum c_\nu^2}\left[-\delta c_1^2c_3 + \delta c_2^2c_3 + \delta c_3^3 + \delta c_3c_4^2 + \gamma c_1^2c_4 + (2\beta-\gamma)c_2^2c_4 + \right.$$
$$\left. + \gamma c_3^2c_4 + \gamma c_4^3 + 2(\beta-\gamma)c_1c_2c_3 - 2\delta c_1c_2c_4\right]$$

$$\mu_{32} = \frac{1}{\sum c_\nu^2}\left[-\delta c_1^2c_3 + \delta c_2^2c_3 - \delta c_3^3 - \delta c_3c_4^2 + (\gamma-2\beta)c_1^2c_4 - \gamma c_2^2c_4 - \right.$$
$$\left. - \gamma c_3^2c_4 - \gamma c_4^3 + 2(\beta-\gamma)c_1c_2c_3 - 2\delta c_1c_2c_4\right] .$$

Die aufgestellte Linearitätsbedingung besagt nun insbesondere die Existenz von Konstanten τ_ν so, daß

$$\mu_{32} = \sum \tau_\nu \cdot \mu_{\nu 1}$$

für alle $c \in E^\times$. Durch Koeffizientenvergleich erhält man

(in $c_1^2c_3$): $\quad \tau_3\gamma - \tau_4\delta = -\delta$ (2)

(in $c_2^2c_3$): $\quad \tau_3(2\beta-\gamma) + \tau_4\delta = \delta$ (3)

(in c_3^3): $\quad \tau_3\gamma + \tau_4\delta = -\delta$ (4) .

Aus (2) und (4) folgt $\tau_4\delta = 0$. Für $\tau_4 = 0$ hat man aus (2) und (3), daß $\tau_3(\gamma-2\beta) = -\delta = \tau_3\gamma$; für $\tau_3 \neq 0$ wäre dann $\beta = 0$, ein Widerspruch zur Regularität von A ; also ist mit τ_4 auch τ_3 Null und nach (2) folglich in jedem Fall

$$\delta = 0 \quad .$$

Wegen der Regularität von A ist dann $\gamma \neq 0$ und wegen (4) folglich $\tau_3 = 0$. Weitere Koeffizientenvergleiche liefern dann

(in $c_3^2c_4$): $\quad \tau_4\gamma = -\gamma$

(in $c_1c_2c_3$): $\quad 2\tau_4(\beta-\gamma) = 2(\beta-\gamma)$,

also $\tau_4 = -1$ und

$$\beta = \gamma \quad ;$$

d.h. A hat notwendig die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sigma & & \\ & \gamma & & \\ & & \gamma & \\ & & & \gamma \end{pmatrix} \quad . \tag{5}$$

Mit einer solchen Matrix A vereinfacht sich dann $c^{-1}\cdot A(c-)\cdot c$ zu

$$c^{-1}\cdot A(c-)\cdot c = \gamma\cdot c^{-1}(c-)c + c^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1-\gamma & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}(c-)\cdot c + c^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \sigma & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}(c-)\cdot c$$

$$= \gamma\cdot(-c) + (1-\gamma)\begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ & 0 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} c_2 & c_1 & -c_4 & c_3 \\ & 0 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1+\sigma c_2 & -c_2+\sigma c_1 & -c_3-\sigma c_4 & c_4+\sigma c_3 \\ \gamma c_2 & \gamma c_1 & \gamma c_4 & -\gamma c_3 \\ \gamma c_3 & -\gamma c_4 & \gamma c_1 & \gamma c_2 \\ \gamma c_4 & \gamma c_3 & -\gamma c_2 & \gamma c_1 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

und diese Matrix ist in der Tat eine lineare Funktion ihrer ersten Spalte, d.h. die Multiplikation von T_A^W ist genau für die Matrizen A der Form (5) rechtsdistributiv.
Ferner ist dann $c^{-1}\cdot A(c)\cdot c$, also die erste Spalte der Matrix $c^{-1}\cdot A(c-)\cdot c$, ersichtlich gleich $A(c)$; damit vereinfacht sich die Multiplikation in T_A^W zu

$$m \circ x = A^{-1}(m^{-1} \cdot A(mx) \cdot m) \quad . \tag{7}$$

Wie man daran leicht abliest, ist die Determinante der Linksmultiplikation mit m in T_A^W gleich der Determinante der Quaternionenlinksmultiplikation, also für $m \neq 0$ von 0 verschieden; die Gestalt (5) für A ist also notwendig und hinreichend dafür, daß T_A^W eine Divisionsalgebra ist.
Die explizite Darstellung der Linksmultiplikation in T_A^W als Matrix erhält man nach (7) entweder durch unmittelbare Rechnung ausgehend von (6) ; oder aber, indem man bemerkt, daß sich bei der besonderen Gestalt von A alle Produkte von Basiselementen 1,i,j,k wie bei der umgekehrten Quaternionenmultiplikation ergeben mit Ausnahme der beiden Produkte

$$j \circ k = A^{-1}(-j \cdot (\sigma+\gamma i) \cdot j) = A^{-1}((-\sigma j+\gamma k) \cdot j) = A^{-1}(\sigma-\gamma i) = 2\sigma - i$$

$$k \circ j = A^{-1}(-k \cdot (-\sigma-\gamma i) \cdot k) = A^{-1}((\gamma j+\sigma k) \cdot k) = A^{-1}(-\sigma+\gamma i) = -2\sigma + i \quad .$$

Mit $\alpha = \sigma$ erhält man also die in der Behauptung angegebene Multiplikation von T_α^W , zunächst noch mit beliebigem (nicht notwendig positivem) α . Man verifiziert jedoch unmittelbar, daß wieder $(x_1,x_2,x_3,x_4) \longmapsto (x_1,-x_2,-x_3,x_4)$ ein Isomorphismus von T_α^W auf $T_{-\alpha}^W$ ist, so daß man sich auf $\alpha \geqslant 0$ beschränken kann.-

Nun zum Isotopieproblem: Völlig analog wie in a) für die Algebren T_α^S ergibt sich auch hier mit geometrischen Argumenten, daß aus der Isotopie von T_α^W und T_β^W (wobei $\alpha \geqslant 0$ und o.B.d.A $\beta > 0$) die Existenz eines Isomorphismus C von T_α^W auf T_β^W folgt, welcher sich bei unserer Identifikation von T_α^W und T_β^W als Vektorräumen mit $\mathbb{H}$ als ein orthogonaler , 1 fest und $\langle i,j,k \rangle$ invariant lassender, Automorphismus des normierten Raums $\mathbb{H}$ erweist.

Für beliebige orthogonale x und y aus $\langle i,j,k \rangle$ gilt nun nach Definition der Multiplikation von T_α^W für die i-Komponente $[x \overset{\circ}{\alpha} y]_i$ von $x \overset{\circ}{\alpha} y$, daß

$$\operatorname{Re} x \overset{\circ}{\alpha} y = 2\alpha(x_4y_3 - x_3y_4) = 2\alpha[x \overset{\circ}{\alpha} y]_i = 2\alpha[yx]_i$$

und folglich ist dann stets

$$2\alpha[yx]_i = \operatorname{Re} x \overset{\circ}{\alpha} y = \operatorname{Re} C(x \overset{\circ}{\alpha} y) = \operatorname{Re} (C(x) \overset{\circ}{\beta} C(y)) = 2\beta[C(y) \cdot C(x)]_i \quad .$$

Da bis auf eine Spiegelung die orthogonale Abbildung C andererseits

ein Automorphismus des Quaternionenkörpers ist, erhält man daraus jedenfalls

$$2\alpha[yx]_i = \pm 2\beta[C(yx)]_i \quad ;$$

und da x und y beliebig orthogonal in $\langle i,j,k\rangle$ waren, ergibt sich

$$[C(z)]_i = \pm \alpha/\beta\cdot[z]_i \quad \text{für alle } z \in \langle i,j,k\rangle \ . \tag{8}$$

Insbesondere läßt C den Unterraum $\langle j,k\rangle$ und damit auch den eindimensionalen Unterraum $\langle i\rangle$ invariant und induziert dann auf letzterem die Identität oder die Spiegelung. Aus (8) hat man daher wegen $\alpha,\beta \geq 0$, daß $\alpha = \beta$, was zu zeigen war. □

3.6 Achtdimensionale Ebenen vom Lenz-Typ V mit 17-dimensionaler Kollineationsgruppe und komplexem Kern .

Die Divisionsalgebren, die die hier zu besprechenden Ebenen koordinatisieren, sind in der Literatur schon untersucht:

3.6.1
Nach REES ist jede endlichdimensionale reelle Divisionsalgebra mit 1, in der mindestens zwei der drei durch Linksnukleus, Mittelnukleus und Kern gegebenen Unterkörper nicht nur aus $\langle 1\rangle = \mathbb{R}$ bestehen, entweder der Körper der komplexen Zahlen oder aber isotop zu einer der Algebren

$$R_\vartheta = \mathbb{C}^2 \text{ mit Multiplikation}$$
$$(m_1,m_2)\circ(z_1,z_2) = (m_1z_1 + m_2\overline{z_2}e^{i\vartheta}\ ,\ m_1z_2 + m_2\overline{z_1})$$

wobei $0 < \vartheta \leq \pi$.
(Die rechtsstehenden Produkte verstehen sich in $\mathbb{C}$).
Ferner sind R_ϑ und R_φ genau dann isotop, wenn $\vartheta = \varphi$. Insbesondere erhält man genau für $\vartheta = \pi$ den Quaternionenkörper.

3.6.2 Satz.

Sei $\mathcal{P}$ eine nicht desarguesche kompakte achtdimensionale projektive Ebene vom Lenz-Typ V mit komplexem Kern.
Genau dann besitzt die Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ von $\mathcal{P}$ eine kompakte zusammenhängende auf L_∞ fast effektiv als zweidimensionale Torusgruppe $\mathbb{T}^2$ wirkende Untergruppe K , wenn $\mathcal{P}$ (für geeignetes ϑ , $0 < \vartheta < \pi$)

isomorph zur Ebene $\mathcal{R}_\vartheta$ über der Rees'schen Algebra R_ϑ ist; und K ist dann bezüglich ihrer Eigenschaften maximal.
Für die Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ in $\mathcal{R}_\vartheta$ hat man in Koordinaten über R_ϑ :

$$\Gamma_{W,S} = \left\{ \begin{matrix} (x_1,x_2,y_1,y_2) \longmapsto (ax_1 \ , \ acx_2 \ , \ by_1 \ , \ bcy_2) \ / \\ a,b \in \mathbb{C}^\times \ ; \ c \in \mathbb{C} \ , \ |c| = 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= \mathrm{Aut}^1(R_\vartheta) \cdot \Gamma_{[W \wedge L_\infty, S]} \cdot \Gamma_{[S \wedge L_\infty, W]} \quad .-$$

Beweis:

K überlagert $\mathbf{T}^2$ endlich, besitzt also dieselbe Lie-Algebra wie $\mathbf{T}^2$ und ist folglich selbst eine zweidimensionale Torusgruppe. Sei $T \cong SO(2)$ die maximale kompakte Untergruppe der zu $\mathbb{C}^\times = SO(2) \times \mathbb{R}^\circ$ isomorphen Streckungsgruppe $\Gamma_{[0,L_\infty]}$. Da K mit T kommutiert (2.2.7) und K fast effektiv auf L_∞ wirkt, erzeugen K und T eine zu $\mathbf{T}^3$ isomorphe Untergruppe Δ von $\Gamma_{W,S}$.
Δ wirkt nun, da kompakt und zusammenhängend, auf den affinen Geraden W und S bei geeigneter Identifikation mit $\mathbb{R}^4$ als Untergruppe von $SO(4)$. Da $SO(4)$ nach 3.2.5 keine dreidimensionalen kommutativen Untergruppen besitzt, hat die Wirkung von Δ sowohl auf S als auch auf W einen (kompakten) Ineffektivitätskern positiver Dimension, der nach 3.1.8 als kompakte multiplikative Untergruppe des Mittel- bzw. Linksnukleus einer koordinatisierenden Divisionsalgebra D aufgefaßt werden kann. Da $\mathbb{R}^\times$ keine kompakten Untergruppen positiver Dimension besitzt, sind also nach 3.1.8 Kern, Mittel- und Linksnukleus von D isomorph zu $\mathbb{C}$; nach dem eben zitierten Ergebnis von REES ist folglich D isotop zu R_ϑ für geeignetes ϑ und nach 3.1.5 damit $\mathcal{P}$ isomorph zu $\mathcal{R}_\vartheta$.
Sei nun umgekehrt ϑ beliebig aus $(0,\pi)$. Kern, Mittel- und Linksnukleus von R_ϑ sind gleich dem Unterkörper $C = \{(z_1,0) \ / \ z_1 \in \mathbb{C}\}$ von R_ϑ , wie man unmittelbar verifiziert. C assoziiiert also mit allen Elementen von R_ϑ in allen Positionen und infolgedessen ist Konjugation in R_ϑ mit einem Element aus C ein Automorphismus; das heißt die Gruppe der Abbildungen

$$R_\vartheta \longrightarrow R_\vartheta \ : \ (z_1,z_2) \longmapsto (c,0) \circ (z_1,z_2) \circ (\bar{c},0) = (z_1, c^2 z_2)$$

(für $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$) ist eine zu $SO(2)$ isomorphe Automorphismengruppe von R_ϑ (mit 1.3.3 und 1.2.3 ergibt sich, daß es sich genau

um die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe von R_ϑ handelt).

Übersetzt man diese Automorphismengruppe als Untergruppe der Kollineationsgruppe $\Gamma_{W,S}$ von $\mathcal{R}_\vartheta$ und nimmt man noch die Streckungen mit Elementen aus C in Richtung der Achsen W und S hinzu (die nach 3.1.8 wegen $C = N_\lambda(R_\vartheta) = N_\mu(R_\vartheta)$ Kollineationen sind), so erhält man gerade die in der Behauptung notierte Kollineationsgruppe. Daß diese schon ganz $\Gamma_{W,S}$ ist, ergibt sich am bequemsten aus Dimensionsüberlegungen:

Die gefundene Gruppe ist 5-dimensional; zusammen mit den Scherungen und Translationen ergibt sich also eine mindestens 17-dimensionale Kollineationsgruppe für $\mathcal{R}_\vartheta$. In der Übersicht 3.4 über die achtdimensionalen Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe tauchen Ebenen mit komplexem Kern nur in 3.4.3, und dann mit genau 17-dimensionaler Kollineationsgruppe, also genau 5-dimensionaler $\Gamma_{W,S}$, auf. Wegen des Zusammenhangs von $\Gamma_{W,S}$ (3.1.7) ist die gefundene Gruppe also gleich $\Gamma_{W,S}$.

Aus der Einordnung in die Übersicht 3.4 ergibt sich auch, daß die Ebenen $\mathcal{R}_\vartheta$ für <u>alle</u> $\vartheta \in (0,\pi)$ der Ausgangsbedingung des vorliegenden Satzes genügen, sowie die Maximalität von K.- □

Damit ist unsere Klassifikation abgeschlossen. Das Ergebnis aus 3.4 und der Sätze aus den Abschnitten 3.5 und 3.6 läßt sich zusammenfassen in folgendem

3.7 <u>Klassifikationssatz.</u>

Außer der desargueschen Ebene über dem Quaternionenkörper (mit bekanntlich 35-dimensionaler Kollineationsgruppe) gibt es bis auf Isomorphie genau die folgenden achtdimensionalen kompakten projektiven Ebenen vom Lenz-Typ V mit mindestens 17-dimensionaler Kollineationsgruppe:

<u>Ebenen mit 18-dimensionaler Kollineationsgruppe:</u>

a) die Ebenen $\mathcal{T}^S_\alpha$ und $\mathcal{T}^W_\alpha$ $(0 < \alpha \in \mathbb{R})$ aus 3.5.3 und die dualen Ebenen der Ebenen $\mathcal{T}^S_\alpha$.

Ebenen mit 17-dimensionaler Kollineationsgruppe:

b) die Ebenen $\mathfrak{D}_\tau$ $(1 \neq \tau > 0)$ aus 3.4.2 über den in 1.3.5 klassifizierten vierdimensionalen Divisionsalgebren mit dreidimensionaler Automorphismengruppe.

c) die Ebenen $\mathfrak{R}_\vartheta$ $(0 < \vartheta < \pi)$ aus 3.6.2 über den Divisionsalgebren von Rees (3.6.1); dies sind die einzigen in dieser Aufstellung erscheinenden Ebenen mit komplexem Kern.

d) die in 3.5.1c) wenn schon nicht einzeln aufgezählten, so doch beschriebenen Ebenen $\mathcal{T}_A^W$ und $\mathcal{T}_A^S$ und die dualen Ebenen der letzteren.

Die einzelnen Ebenen aus a) - c) sind paarweise nicht isomorph und nicht isomorph zu den Ebenen aus d). □

Die genaue Beschreibung der Zusammenhangskomponente der Kollineationsgruppe dieser Ebenen kann den zitierten Stellen entnommen werden.

Schlußbemerkung und Ausblick.

Die besonderen Eigenschaften, die die Ebenen vom Lenz-Typ V gegenüber allgemeinen Translationsebenen auszeichnen, wurden für die vorstehende Klassifikation im wesentlichen in Gestalt der folgenden drei Werkzeuge benutzt:

(i) die Linearität der Wirkung der Standgruppe $\Gamma_{W,S}$ zweier affiner Geraden S und W auf der uneigentlichen Geraden (3.1.3).

(ii) die Beschreibbarkeit der Ineffektivitätskerne von $\Gamma_{W,S}$ auf W bzw. S durch abgeschlossene Unterkörper koordinatisierender Divisionsalgebren; insbesondere die daraus resultierenden Aussagen über die Dimension kompakter Anteile dieser Ineffektivitätskerne.

(iii) die Tatsache, daß die Kollineationsgruppe einen Punkt der uneigentlichen Geraden festhält und auf dem Rest transitiv wirkt .

Das erste dieser Werkzeuge ist bequem für den elementaren Zugang, aber zumindest für achtdimensionale Ebenen nicht unersetzlich. In der Tat wurde die Linearität der Wirkung auf der uneigentlichen Geraden streng genommen nur für kompakte zusammenhängende Untergruppen von $\Gamma_{W,S}$ gebraucht und nach (allerdings keinesfalls elementaren) Ergebnissen von RICHARDSON gilt, daß die Wirkung kompakter zusammenhängender Liegruppen auf der 4-Sphäre allemal äquivalent zu einer in gewissem Sinne linearen Wirkung ist.

Damit lassen sich dann mit den hier dargestellten Methoden auch Aussagen für Translationsebenen Ergebnisse erzielen: In Verallgemeinerung eines Satzes von DEMPWOLFF (1973) auf höhere Dimensionen kann man etwa zeigen, daß die Kollineationsgruppe einer nicht moufangschen kompakten Translationsebene nicht transitiv auf der uneigentlichen Geraden operieren kann; und eine auf 2.3.2 aufbauende Analyse vorkommender Fälle ähnlich wie in 3.4 zusammen mit den Ergebnissen von RICHARDSON erlauben es dann leicht, etwa die Dimension der Kollineationsgruppe nichtdesarguesscher achtdimensionaler kompakter Translationsebenen nach oben durch 21 abzuschätzen.-

Das zweite genannte Werkzeug hingegen ist gewichtiger. Die offene Frage beispielsweise, ob es achtdimensionale kompakte Translationsebenen mit genau 21-dimensionaler Kollineationsgruppe gibt, hängt mit dem Problem seiner Ersetzbarkeit zusammen.

Nur wenn ein koordinatisierender Quasikörper R im Zentrum enthält (mit solchen hat sich die Literatur bisher meistens befaßt, vgl. etwa PLAUMANN - STRAMBACH (1970) und (1973)), ist unmittelbar eine ähnlich brauchbare Aussage für achtdimensionale kompakte Translationsebenen einzusehen: dann kann eine kompakte Kollineationsgruppe, die die Koordinatenachsen festhält und auf einer der beiden ineffektiv wirkt, höchstens zweidimensional sein. Infolgedessen sind unter dieser Voraussetzung etwa die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3 verallgemeinerungsfähig und damit kann dann die Existenz solcher Translationsebenen mit 21-dimensionaler Kollineationsgruppe ausgeschlossen werden.

Der weitere Nutzeffekt einer solchen algebraischen Voraussetzung im Hinblick auf eine Klassifikation nach der Kollineationsgruppe ist allerdings gering, sofern nicht Transitivitätseigenschaften wie in (iii) hinzukommen. Was den Ersatz des Merkmals (iii) betrifft, ist folglich das Studium kompakter Untergruppen der multiplikativen Loop beliebiger lokalkompakter Quasikörper von vordringlicher Wichtigkeit.

Literatur

Albert, A.A. (1958): Finite division algebras and finite planes. Proc. Symp. Appl. Math. 10, 53 - 70 .

André, J. (1954) : Über nicht-desarguesche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. 60, 156 - 186 .

Betten, D. (1972) : 4-dimensionale Translationsebenen. Math. Z. 128, 129 - 151 .

(1973a) : Die komplex-hyperbolische Ebene. Math. Z. 132, 249 - 259 .

(1973b) : 4-dimensionale Translationsebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe. Geometriae Dedicata 2 , 327 - 339 .

(1973c) : 4-dimensionale Translationsebenen mit irreduzibler Kollineationsgruppe. Archiv d. Math. XXIV, 552 - 560 .

(1973d) : Topologische Transformationsgruppen. Vorlesung Tübingen Wintersemester 72/73 .

(1974a) : 4-dimensionale Translationsebenen mit 7-dimensionaler Kollineationsgruppe. Erscheint demnächst.

(1974b) : 4-dimensionale Translationsebenen mit genau einer Fixrichtung. Erscheint demnächst.

Bos, W. (1965) : Ein einfacher Beweis eines Satzes von Hurwitz über reelle Divisionsalgebren. Math. Phys. Sem. Ber. 12, 79 - 86 .

Breitsprecher, S. (1971) : Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind. Math. Z. 121, 157 - 174 .

(1972) : Zur topologischen Struktur zweidimensionaler projektiver Ebenen. Geometriae Dedicata 1, 21 - 32 .

Dembowski, P. (1968) : Finite Geometries. Springer-Verlag.

Dugundji, J. (1965) : Topology. Allyn and Bacon, Boston.

Hofmann, K.H. (1963) : Einführung in die Theorie der Liegruppen Teil I und II . Vorlesung Tübingen (berichtigter Nachdruck von Teil I 1968) .

Hughes, D.R. - Piper, F.C. (1973) : Projective planes. Springer-Verlag.

Kalscheuer, F. (1940) : Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg 13, 413 - 435 .

Kestelmann, H. (1951) : Automorphisms of the field of complex numbers. Proc. London Math. Soc. (2) 53, 1 - 12 .

Pickert, G. (1955) : Projektive Ebenen. Springer-Verlag.

Plaumann, P. - Strambach, K. (1970) : Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum. Archiv d. Math. XXI , 455 - 465 .

(1973) : Zur Existenz von Quasikörpern. Erscheint demnächst in Journal of Algebra .

(1974) : Hurwitzsche Ternärkörper. Erscheint demnächst in Archiv d. Math.

Rees, D. (1950) : Nuclei of non-associative division algebras. Proc. Cambridge Philos. Soc. 46, 1 - 18 .

Richardson, R.W.jr. (1961) : Groups acting on the 4-sphere. Ill. J. Math. 5, 474 - 485 .

Salzmann, H. (1967) : Topological planes. Adv. in Math. 2, 1 - 60 .

(1969) : Kompakte vierdimensionale Ebenen. Archiv d. Math. XX, 551 - 555 .

(1970) : Kollineationsgruppen kompakter vierdimensionaler Ebenen. Math. Z. 117, 112 - 124 .

(1971) : Kollineationsgruppen kompakter vierdimensionaler Ebenen II . Math. Z. 121, 104 - 110 .

(1973) : Kompakte vierdimensionale projektive Ebenen mit 8-dimensionaler Kollineationsgruppe. Math. Z. 130 , 235 - 247 .

(1974a): Homogene kompakte projektive Ebenen. Erscheint demnächst in Pacific J. Math.

(1974b): Compact planes of Lenz type III. Erscheint demnächst in Geometriae Dedicata.

(1974c): Homogene affine Ebenen. Erscheint demnächst in Abh. Math. Sem. Hamburg .

Salzmann,H. - Löwen, R. (1971) : Zahlbereiche Teil I . Vorlesung Tübingen Sommersemester 1971 .

Salzmann, H. - Hähl, H. (1972) : Zahlbereiche Teil II und III. Vorlesung Tübingen Wintersemester 1971/72 .

Spanier, E. (1966) : Algebraic Topology. Mc Graw Hill .

Tits, J. (1956) : Sur les groupes doublement transitifs continus: corrections et compléments. Comment. Math. Helv. 30 , 234 - 240 .

van der Waerden, B.L. : Algebra I . Springer-Verlag 6. Auflage (1964) .

Lebenslauf

Am 27.1.45 wurde ich in Stuttgart als erster Sohn von Friedrich Hähl, damals Direktionsassistent, und Liselotte Hähl geborene Mauch geboren. Ich bin in Kornwestheim aufgewachsen. Dort besuchte ich vom Herbst 1951 bis Frühjahr 1955 die Grundschule, anschließend das Gymnasium und bestand im Frühjahr 1964 die Reifeprüfung.

Um Einblick in das praktische Berufsleben zu bekommen, arbeitete ich anschließend bis März 1965 als Praktikant bei IBM Deutschland in Stuttgart, Böblingen und Sindelfingen; ich war dort teilweise im Außendienst, teilweise in Rechenzentren mit der Programmierung kommerzieller und technischer Abläufe befaßt. Von April 1965 bis März 1967 war ich Soldat bei der Luftwaffe; ich wurde als Leutnant der Reserve entlassen.

Im Sommersemester 1967 nahm ich das Studium der Mathematik an der Universität Tübingen auf. Zu Beginn des Sommersemesters 1969 legte ich dort das Vordiplom in Mathematik (mit Physik als Nebenfach) ab.

Seit Beginn meines Studiums war ich Stipendiat der Studienstiftung des deutschen Volkes; auf der Basis eines Auslandsstipendiums dieser Stiftung wechselte ich zum Wintersemester 1969 an die Universität Paris (Faculté des Sciences Orsay) über. Im Sommer 1970 bestand ich dort die Maîtrise ès-Sciences Mathématiques, was mir die Möglichkeit gab, im folgenden Studienjahr (Wintersemester 70/71 - Sommersemester 1971) ein Aufbaustudium im Rahmen des sog. 3ème cycle zu betreiben. Es war schwerpunktmäßig der Differentialtopologie und der Topologie der Mannigfaltigkeiten gewidmet; ich schrieb eine Diplomarbeit über reguläre Umgebungen unter der Anleitung von Prof. L.C. Siebenmann und bestand im Sommer 1971 das Diplôme d'Etudes Approfondies.

Im September 1971 kehrte ich an die Universität Tübingen zurück und begann, mich unter der Anleitung von Prof. H. Salzmann mit topologischer Geometrie zu befassen. Am mathematischen Institut der Universität Tübingen bin ich seit Oktober 1971, zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft, ab 1. Januar 1972 dann als Verwalter

einer Assistentenstelle angestellt. Während dieser Zeit entstand meine Dissertation ''Achtdimensionale kompakte Translationsebenen mit großer Kollineationsgruppe''. Das Seminar von Prof. K.P. Hadeler bot mir die Gelegenheit, mich zudem mit Problemen der Biologie zu befassen.

Meine akademischen Lehrer in Tübingen waren W. Beekmann, G. Betsch, W. Felscher, K.P. Hadeler, H.D. Ibisch, H. Krüger, F. Lenz, P. Plaumann, K. Radbruch, M. Reimer, H. Salzmann, H.H. Schaefer, K. Strambach, O. Tamaschke, H. Walk, H. Wielandt, K. Zeller; in Paris-Orsay: H. Cartan, C. Ehresmann, F. Laudenbach, V. Poenaru, H. Rosenberg, L.C. Siebenmann.

Seit März 1972 bin ich mit Maria Hähl geb. Funk verheiratet.

Veröffentlichungen:

L. Siebenmann, L. Guillou, H. Hähl : Les voisinages ouverts réguliers. Ann. scient. Éc. Norm. Sup.(4) 6 (1973), 253 - 293

L. Guillou, H. Hähl : Les voisinages ouverts reguliers, critères homotopiques d'identification. Erscheint demnächst.

Druck: Polyfoto - Dr. Vogt KG
7000 Stuttgart 1, Forststr. 58
Telefon (0711) 61 06 41 / 42

Druck: Polyfoto - Dr. Vogt KG
7000 Stuttgart 1, Forststr. 58
Telefon (0711) 61 06 41 / 42